Ueber eine Klasse besonders einfacher Modulargleichungen zweiten Grades von der Form $y^2 = R(x)$

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Fakultät

der

Universität Basel

von

HANS RUCH

aus Mitlödi

Basel 1931

Druck von Benno Schwabe & Co.

Ueber eine Klasse besonders einfacher Modulargleichungen zweiten Grades von der Form $y^2 = R(x)$

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Fakultät

der

Universität Basel

von

HANS RUCH

aus Mitlödi

Basel 1931

Druck von Benno Schwabe & Co.

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. *O. Spieß* und Dr. *A. Ostrowski*.

Basel, den 17. Februar 1931.

Prof. Dr. *W. Matthies*
Dekan

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

MEINER LIEBEN MUTTER
GEWIDMET

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544316_0102

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

§ 1. Einleitung und Problemstellung 7
§ 2. Notwendige und hinreichende Bedingungen 10
§ 3. Der Index der Kongruenzgruppen n^{ter} Stufe 21
§ 4. Die Anzahl der Ecken des Fundamentalbereiches 25
§ 5. Die Anzahl der i- und ϱ-Ecken 26
§ 6. Die Anzahl der ∞-Ecken 29
§ 7. Der Fall $g \neq 1$ 34
§ 8. Das Geschlecht p einer Kongruenzgruppe 38
§ 9. Ueber einige spezielle Gruppen 40
§ 10. Auffindung sämtlicher Gruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ vom Geschlecht $p = 0$ 49
§ 11. Weitere Ausscheidung der Gruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ 50
§ 12. Die Modulargleichungen von der Form $y^2 = R(x)$ und ihre zugehörigen Modulfunktionen 52
§ 13. Zusammenfassung 62

§ 1. Einleitung und Problemstellung.

Ist $\varphi(t)$ eine Modulfunktion und m eine ganze positive Zahl, so besteht bekanntlich zwischen den beiden Funktionen $x = \varphi(t)$ und $x_1 = \varphi(mt)$ eine algebraische Relation, die sog. *Modulargleichung*[1]).

$$F(x, x_1) = 0 \tag{1}$$

Diese Gleichungen sind im allgemeinen selbst für die Modulfunktionen niedrigster Stufe (z. B. für die absolute Invariante $J[t]$) und die kleinsten Werte von m ziemlich kompliziert. Sie werden daher meist auch nur in Parameterdarstellung gegeben. Dagegen sind unter den Modulfunktionen, die zu den Kongruenzgruppen höherer Stufe gehören, einige bekannt, deren Modulargleichungen für kleine m durch bemerkenswerte Einfachheit ausgezeichnet sind.

Die am längsten bekannte derartige Gleichung ist

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = g(x) \tag{2}$$

Sie wurde von *Gauß* in seiner Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels behandelt. Die zugehörige Modulfunktion ist:

$$x = \sqrt{1 - \lambda(t)} \tag{3}$$

wo $\lambda(t)$ die bekannte *Legendre*'sche Funktion bedeutet. Die zugehörige Kongruenzgruppe der Modulsubstitutionen ist von der vierten Stufe. Ihre Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ sind durch folgende Kongruenzen charakterisiert:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\equiv 1 \,(mod\ 4),\ \beta \equiv 0 \,(mod\ 4) \\ \gamma &\equiv 0 \,(mod\ 2),\ \delta \equiv 1 \,(mod\ 4) \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Bildet man die auf- und absteigende Reihe der Iterierten von $g(x)$: $\ldots\ldots\ x_{-k}\ \ldots\ldots\ x_{-3},\ x_{-2},\ x_{-1},\ x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots\ x_k,\ \ldots\ldots$, wo also

[1]) *Biedermann:* Ueber Multiplikatorgleichungen. Arch. f. Math. u. Phys. 2. Reihe, 5. Teil.

der Reihe nach $x_{k+1} = g(x_k)$ ist, und setzt für x die Verzweigungspunkte 0 und ∞ ein, so erhält man nur eine endliche Zahl von Werten, nämlich 0, 1, —1, ∞. Der Zusammenhang dieser Zahlen kann durch die folgende Figur erklärt werden:

$$\begin{array}{ccccccc} & & +1 & & & & \\ & \diagup & & & & & \\ +1 & — & (-1) & = & \infty & = & 0 \end{array}$$

die, von links nach rechts gelesen, bedeutet: $x = 1$ hat die beiden Vorgänger $x_{-1} = 1$ und $x_{-1}^* = -1$. Die Vorgänger von —1 fallen zusammen in ∞ usw. Da diese Zahlen *Verzweigungspunkte der Funktion* $g(x)$ und ihrer Iterierten sind, nennen wir obige Figur das *Verzweigungsschema von* $g(x)$.

Herr Prof. *Spieß*[1]) hat durch Induktion zwei sich analog verhaltende Funktionen gefunden:

$$x_1 = \sqrt{\frac{x\,(3-x)}{1+x}} = h(x) \tag{4}$$

und

$$x_1 = \sqrt{\frac{x\,(1-x)}{(1+x)}} = j(x) \tag{5}$$

Durch die Methoden der Iterationsrechnung hat er gezeigt, daß dieselben ebenfalls Multiplikationstheoreme von Modulfunktionen darstellen. Die Gruppen der Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ die diese Modulfunktionen ungeändert lassen, sind wie folgt charakterisiert:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 1 \ (mod\ 6),\ \beta \equiv 0 \ (mod\ 6) \\ \gamma \equiv 0 \ (mod\ 2),\ \delta \equiv 1 \ (mod\ 6) \end{array}\right\} \quad (b)$$

resp.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 1 \ (mod\ 8),\ \beta \equiv 0 \ (mod\ 8) \\ \gamma \equiv 0 \ (mod\ 2),\ \delta \equiv 1 \ (mod\ 8) \end{array}\right\} \quad (c)$$

Die Existenz dreier Fälle, in denen die Modulargleichung die einfache Gestalt annimmt:

$$x_1^3 = R(x) \tag{6}$$

wo $R(x)$ eine *rationale Funktion zweiten Grades* in x bedeutet, gibt uns Anlaß, die Aufgabe zu stellen, alle Modulfunktionen zu bestim-

[1]) *O. Spieß.* Ueber eine Klasse von Funktionalgleichungen, Verh. der Naturforsch. Ges. Basel, Bd. 15, II. Teil 1927.

men, deren Multiplikationstheoreme im Fall $m = 2$ die eben genannte Gestalt besitzen.

In dieser Allgemeinheit dürfte diese Aufgabe zurzeit kaum lösbar sein. Die vorliegende Arbeit muß sich damit bescheiden, das Problem unter beschränkenden Voraussetzungen zu behandeln.

Es wird nämlich der Untersuchung nur ein bestimmter, wenn auch sehr allgemeiner Typus von Modulgruppen zu Grunde gelegt, und es werden dann diejenigen Gruppen ausgeschieden, zu denen Modulfunktionen $q(t)$ von der gesuchten Art gehören. Auf diese Weise werden noch im wesentlichen *drei weitere Funktionen* $q(t)$ mit ihren zugehörigen Modulargleichungen gefunden.

Der Gang der Untersuchungen ist der folgende:

Die Analyse der Voraussetzungen für die Existenz von Modulargleichungen des gesuchten Typus führt auf *notwendige Bedingungen* für die Substitutionen der Gruppe, die durch Hinzunahme der Bedingung, daß das Geschlecht der Gruppe null sein soll, zu *hinreichenden* ergänzt werden. Die der Untersuchung zu unterwerfenden Gruppen werden aus der Gesamtheit aller Modulgruppen auserwählt und ihr Typus charakterisiert.

In § 2 stellen wir die *Bedingungen* auf, die die Gruppe der Substitutionen erfüllen muß, damit eine zugehörige Modulargleichung von der Form (6) existieren kann. Eine *Klasse von Kongruenzgruppen* $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ wird eingeführt und durch eine Tabelle erläutert.

In § 3 werden die *Formeln für den Index* dieser Gruppen aufgestellt.

In den §§ 4, 5, 6 wird für den Fall $g = 1$ die *Anzahl der Ecken* bestimmt, welche der Fundamentalbereich einer Gruppe besitzt.

In § 7 wird der *allgemeine Fall* behandelt.

In § 8 wird die allgemeine Formel für das *Geschlecht* p unserer Kongruenzgruppen abgeleitet.

In § 9 werden die Formeln der §§ 6, 7 auf *bestimmte Kategorien der Stufenzahl* n angewendet und für die Stufenzahlen 1 bis 30 numerisch ausgewertet.

In § 10 wird wenigstens für die Gruppen mit $g = 1$ nachgewiesen, daß für $n > 35$ das *Geschlecht immer größer als Null* ist.

Aus den so gefundenen Gruppen vom Geschlecht 0 werden in § 11 diejenigen ausgeschieden, die *die übrigen in* § 2 *aufgestellten Bedingungen* erfüllen. Es sind dies die Gruppen mit den Indizes $(n, h, g) = (2, 2, 1), (4, 4, 1), (4, 2, 1), (6, 2, 1), (8, 2, 1)$ und $(8, 2, 2)$.

Im § 12 sodann werden für alle in Betracht kommenden Kongruenzgruppen die Modulargleichungen $y^2 = R(x)$ explizit aufgestellt und die zugehörigen (normierten) Modulfunktionen in Beziehung zur *Legendre*'schen Funktion $\lambda(t)$ gesetzt.

In § 13 endlich werden die gefundenen Resultate zusammengestellt.

§ 2. Notwendige und hinreichende Bedingungen.[1])

$\varphi(t)$ sei eine Modulfunktion, die der Bedingung

$$\varphi^2(2t) = R[\varphi(t)] \tag{7}$$

genügt, wo $R[\varphi(t)]$ eine *rationale Funktion zweiten Grades in* $\varphi(t)$ darstellt. Als Modulfunktion bleibt $\varphi(t)$ ungeändert, wenn man auf das Argument t eine Substitution V einer gewissen Untergruppe Γ der vollständigen Modulgruppe M anwendet. Wir schreiben dies in symbolischer Weise:

$$\varphi(\Gamma) = \varphi(Vt) = \varphi(t) \tag{8}$$

Die Funktion $\varphi(t)$ heißt „*zu* Γ *gehörig*", wenn es außer den Substitutionen der Gruppe Γ keine weitern mehr gibt, die $\varphi(t)$ ungeändert lassen. Andernfalls gehört $\varphi(t)$ zu einer umfassenderen Gruppe (die Γ enthält).

Nun erhält man

$$\varphi^2(2\Gamma) = R[\varphi(\Gamma)] = R[\varphi(t)] = \varphi^2(2t) \tag{9}$$

da ja $R(x)$ rational und somit eindeutig ist.

Es ist also

$$\varphi(2\Gamma) = \pm\varphi(2t) \tag{10}$$

Ein Teil der Substitutionen von Γ führt daher $\varphi(2t)$ wieder in sich über. Dieser Teil bildet eine Untergruppe Δ von Γ. Der andere Teil der Substitutionen von Γ führt $\varphi(2t)$ in $-\varphi(2t)$ über. Ist P irgendeine der letztgenannten Substitutionen, so ist die Gesamtheit in ΔP enthalten. Die Gruppe Γ muß sich also zerlegen lassen in:

$$\Gamma = \Delta + \Delta P \tag{11}$$

Als Untergruppe vom Index 2 ist Δ ausgezeichnet. Es ist

$$\Delta P = P\Delta$$

und außerdem ist P^2 eine Substitution von Γ.

[1]) Der Inhalt dieses § geht auf Angaben von Herrn Prof. *Spieß* zurück.

Es gelten demnach die beiden Gleichungen

$$\varphi(2\Delta) = +\varphi(2t) \tag{12}$$

$$\varphi(2\Delta P) = \varphi(2P) = -\varphi(2t) \tag{13}$$

Bezeichnen wir die aus einer beliebigen Substitution $V = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ durch die Transformation

$$2V\tfrac{1}{2} = 2\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} = \begin{pmatrix} a, & 2b \\ \frac{c}{2}, & d \end{pmatrix}$$

hervorgehende Substitution mit V', so folgt aus Gleichung (11)

$$\Gamma' = \Delta' + \Delta' P' \tag{14}$$

wo auch wieder

$$\Delta' P' = P' \Delta'$$

ist. Ersetzt man nun in (9) den Wert t durch $\frac{t}{2}$, so erhält man:

$$\varphi^2(t) = R[\varphi(\tfrac{t}{2})] \tag{15}$$

und daraus folgt:

$$R[\varphi(\tfrac{1}{2}\Gamma)] = \varphi^2(\Gamma) = \varphi^2(t) = R[\varphi(\tfrac{t}{2})] \tag{16}$$

Weil $R(x)$ in x vom zweiten Grade vorausgesetzt wurde, gibt es zu jedem Wert von $R(x)$ *zwei Werte*, x_1 und x_2, die durch eine lineare Gleichung $x_2 = l(x_1)$ untereinander verbunden sind. Eine der beiden Wurzeln der Gleichung $R(x) = \varphi^2(t)$ ist nun $x_1 = \varphi(\frac{t}{2})$ und daher ist die andere $x_2 = l[\varphi(\frac{t}{2})]$. Aus dem Gesagten geht hervor, daß die Gruppe Γ auch eine Untergruppe $\overline{\Delta}$ (die von Δ verschieden ist) vom Index 2 enthält.

$$\Gamma = \overline{\Delta} + \overline{\Delta} Q \tag{17}$$

derart daß:

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\overline{\Delta}) = \varphi(\tfrac{t}{2}) \tag{18}$$

und

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\overline{\Delta}Q) = \varphi(\tfrac{1}{2}Q) = l[\varphi(\tfrac{t}{2})] \tag{19}$$

ist.

Bezeichnen wir die aus einer beliebigen Substitution $V = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ durch die Transformation

$$\tfrac{1}{2}V2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} a, & \frac{b}{2} \\ 2c, & d \end{pmatrix} \tag{20}$$

erhaltene Substitution mit V'', so folgt aus (17)

$$\Gamma'' = \Delta'' + \overline{\Delta}'' Q'' \tag{21}$$

Nun ist $\varphi(\Delta' t) = \varphi(2\Delta\tfrac{1}{2}t) = \varphi(t)$

und ebenso $\varphi(\overline{\Delta} t) = \varphi(t)$ (22)

Sowohl Δ' als auch $\overline{\Delta}$ sind daher Untergruppen von Γ. Ferner ist nach (11) einerseits $\varphi\,(\frac{1}{2}\overline{\Delta}t) = \varphi\,(\frac{t}{2})$

und anderseits

$$\varphi\,(\tfrac{1}{2}\,\Delta'\,t) = \varphi\,[\tfrac{1}{2}\,(2\,\Delta\,\tfrac{1}{2})\,t] = \varphi\,[(\Delta\,\tfrac{1}{2})\,t] = \varphi\,(\tfrac{t}{2})$$

Außer den Substitutionen von $\overline{\Delta}$ gibt es nach Gl. (17) keine weitern innerhalb Γ mehr, die die Gleichung (18) erfüllen. Dagegen könnte es möglich sein, daß außer den Substitutionen von Δ' noch solche existieren. Daher ist

$$\Delta' = \text{Untergruppe von } \overline{\Delta} \qquad (\alpha)$$

In gleicher Weise findet man, daß

$$\overline{\Delta}'' = \text{Untergruppe von } \Delta \qquad (\beta)$$

ist.

Berücksichtigt man, daß die beiden Transformierten $2\,\Gamma\,\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}\Gamma 2$ *invers* sind, so folgt hieraus

$$(\overline{\Delta}'')' = \overline{\Delta} \text{ ist } \textit{Untergruppe} \text{ von } \Delta' \qquad (\gamma)$$

Aus (α) und (γ) ergibt sich, daß beide Gruppen identisch sind. Wir haben also gefunden:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Delta} &= \Delta' \\ \overline{\Delta}'' &= \Delta \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

oder was dasselbe ist:

Unser *erstes* Resultat ist also, daß Γ eine Untergruppe Δ vom Index 2 besitzt, die durch die Transformation $V' = 2\,\Gamma\,\frac{1}{2}$ wieder in eine Untergruppe von Index 2 übergeht. Es folgt daraus, daß P mit Δ, Q mit Δ' vertauschbar ist, also auch P' mit Δ', Q'' mit Δ, und daß

$$(P')^2 \text{ und } (Q'')^2 \text{ zu } \Gamma \text{ gehören.}$$

Nach der Definition von P und Q gelten die Gleichungen:

$$\varphi\,(2P) = -\varphi\,(2t) \qquad (24)$$

$$\varphi\,(\tfrac{1}{2}Q) = l\,[\varphi\,(\tfrac{1}{2}t)] \qquad (25)$$

aus der sich die beiden folgenden ergeben:

$$\varphi\,(P') = -\varphi\,(t) \qquad (26)$$

$$\varphi\,(Q'') = l[\varphi\,(t)] \qquad (27)$$

Da die beiden rechten Seiten durch die Substitutionen von Γ ungeändert bleiben, tun dies auch die linken, was wir so ausdrücken:

$$\varphi(P'\Gamma) = \varphi(P') \tag{28}$$

$$\varphi(Q''\Gamma) = \varphi(Q'') \tag{29}$$

Es folgt

$$\varphi(P'\Gamma P'^{-1}) = \varphi(t) \tag{30}$$

$$\varphi(Q''\Gamma Q''^{-1}) = \varphi(t) \tag{31}$$

Da wir angenommen haben, daß $\varphi(t)$ durch keine andern linearen Substitutionen in sich übergeht, als die von Γ, so können wir schließen, daß

$$P'\Gamma P'^{-1} = Q''\Gamma Q''^{-1} = \Gamma \tag{32}$$

ist. M. a. W.: Γ ist mit den Substitutionen P', Q'' (die keine Modulsubstitutionen zu sein brauchen) vertauschbar:

$$P'\Gamma = \Gamma P' \tag{33}$$

$$Q''\Gamma = \Gamma Q'' \tag{34}$$

Nun ist wegen (17) und (23)

$$\left.\begin{aligned} P'\Gamma &= P'\Delta' + P'\Delta'Q = \Delta'P' + \Delta'P'Q \\ \Gamma P' &= \qquad\qquad = \Delta'P' + \Delta'QP' \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Aus der Gleichheit der linken Seite ergibt sich $\Delta'P'Q = \Delta'QP'$ oder was dasselbe bedeutet, daß der sogenannte Kommutator von $P'Q$, nämlich $P'Q(QP')^{-1}$ zu Δ' gehört.

Dies ist das *zweite* Resultat unserer Analyse.

Es fragt sich nun, wie weit sich die Schlüsse umkehren lassen. Aus der Eigenschaft (35) folgen sofort die Gleichungen (28) und (29), d. h. die Tatsache, daß die Funktionen $\varphi(P')$ und $\varphi(Q'')$ die Substitutionen von Γ gestatten. Kann nun daraus geschlossen werden, daß diese Funktionen sich linear in $\varphi(t)$ ausdrücken lassen? Mit Sicherheit jedenfalls nur dann, *wenn die Gruppe Γ vom Geschlecht Null ist.* Dann ist nämlich $\varphi(P')$ gleich einer rationalen Funktion von $\varphi(t)$, die, weil P' linear ist, ebenfalls linear sein muß.

Ob diese letzte Bedingung *notwendig* ist, ist nicht erwiesen. Wir wollen aber jetzt zeigen, daß sie mit den beiden vorhin gefundenen, notwendigen Bedingungen zusammen *hinreichend* ist, um die Existenz einer Lösung der Gleichung (7) zu garantieren. Wir beweisen also den

Hauptsatz: *Ist Γ eine Gruppe von Modulsubstitutionen, welche folgenden drei Bedingungen genügt:*

I. *Γ hat eine Untergruppe Δ vom Index 2, die durch die Transformation $V' = 2V\frac{1}{2}$ wieder in eine Untergruppe $\Delta' = 2\Delta\frac{1}{2}$ vom Index 2 übergeht, so daß die Zerlegungen gelten:*

$$\Gamma = \Delta + \Delta P, \quad \Gamma = \Delta' + \Delta' Q$$

wo P und Q zwei spezielle Substitutionen bedeuten.

II. *Die Substitution $P'Q\,(QP')^{-1}$ gehört zur Gruppe Δ.*

III. *Γ ist in Bezug auf die vollständige Modulgruppe von endlichem Index und vom Geschlecht Null,*

so gibt es eine zu Γ gehörige Modulfunktion, welche ein Multiplikationstheorem von der Form (7) *besitzt.*

Beweis: Wir stellen einige Folgerungen aus I, II zusammen, die wir brauchen.
Es ist wegen I

$$\Gamma' = \Delta' + \Delta' P' \quad \text{wo } P' = 2\,P\,\tfrac{1}{2} \qquad (\alpha)$$

$$\Gamma'' = \Delta + \Delta\, Q'' \quad \text{wo } Q'' = \tfrac{1}{2}\, Q\, 2 \qquad (\beta)$$

$$\Delta' P' = P' \Delta' \qquad (\gamma)$$

P^2 ist in Δ, P'^2 in Δ' enthalten. $\qquad (\delta)$

Wegen II:

$$P'Q = VQP' \qquad (\varepsilon)$$

wo V in Δ' enthalten ist.

A. Wegen III gibt es (s. Klein-Fricke I, S. 588 ff.) stets Funktionen, die bei allen und nur den Substitutionen von Γ in sich übergehen, und alle diese Hauptmoduln lassen sich linear durch eine beliebige unter ihnen ausdrücken. Es sei nun $x = \varphi(t)$ ein solcher Hauptmodul, so setze man $y = \varphi(2t)$. Zu *einem* gegebenen Wert von x gehören dann *unendlich viele* Werte von t, die aus einem durch die Substitutionen von Γ hervorgehen. Führen wir sie in y ein und fassen das Resultat in dem Symbol $\varphi(2\Gamma)$ zusammen, so folgt aus (α), daß $\varphi(2\Gamma t) = \varphi(\Gamma' 2t)$ nur zwei Werte annimmt, je nachdem die Substitution aus Δ oder aus ΔP stammt, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(2t) \\ \text{und} \qquad y^* &= \varphi(P'2t) = \varphi(2P) \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Man erkennt dann sofort, daß die beiden symmetrischen Ausdrücke $y + y^*$ und $y \cdot y^*$ durch die Substitutionen von Γ in sich übergehen. Wegen III sind sie daher rationale Funktionen von $x = \varphi(t)$, von

denen jedenfalls eine, die wir mit $S = T(x)$ bezeichnen, keine Konstante ist. Infolgedessen besteht zwischen y und x eine Gleichung

$$G(y, x) = 0 \tag{37}$$

die in y vom *zweiten* Grade ist.

B. $y = q(2t)$ geht durch die Substitutionen von $\Gamma'' = \frac{1}{2}\Gamma 2$ in sich über. Wegen (β) nimmt dabei $q(\Gamma'')$ nur zwei Werte an, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ \text{und} \qquad x^* &= \varphi(Q'') \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Man kann nun wie oben zeigen, daß die beiden symmetrischen Funktionen $x + x^*$ und $x \cdot x^*$ zu der Gruppe Γ gehören, und daß also die Gleichung $G(y, x) = 0$ auch in x vom *zweiten* Grade ist.

C. Aus den Bedingungen (α), (γ) und (ε) schließen wir weiter:

$$\begin{aligned} \varphi(P'\Delta') &= \varphi(\Delta' P') &&= \varphi(P') \\ \varphi(P'\Delta' Q) &= \varphi(\Delta' P' Q) = \varphi(\Delta' V Q P') &&= \varphi(P') \end{aligned}$$

D. h. es ist

$$\varphi(P'\Gamma) = \varphi(P') \tag{39}$$

M. a. W.: Die Funktion $\varphi(P')$ gehört ebenfalls zur Gruppe Γ und läßt sich wegen der Bedingung III rational durch $\varphi(t)$ ausdrücken:

$$\varphi(P') = \lambda[\varphi(t)] \tag{40}$$

Ersetzt man hierin t durch $P't$, so folgt nach (δ):

$$\varphi(t) = \varphi(P'^2) = \lambda[\varphi(P')] = \lambda(\lambda[\varphi(t)]) \tag{41}$$

Das ist nur möglich, wenn λ eine *lineare Funktion* ist. Endlich folgt

$$y^* = \varphi(2P) = \varphi(P'2t) = \lambda(y) \tag{42}$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir eine *lineare Beziehung* zwischen x^* und x, nämlich:

$$x^* = \mu(x) \tag{43}$$

Der oben mit S bezeichnete symmetrische Ausdruck in y und y^* ist also eine Funktion zweiten Grades in y, für die wir jetzt $S(y)$ schreiben und die Gleichung $G(y, x) = 0$ nimmt also die Gestalt an

$$S(y) = T(x) \tag{44}$$

worin auch T vom *zweiten Grade* ist.

D. Es bleibt noch übrig, diese Relation in die spezielle Form (6) überzuführen, was durch zweimalige lineare Transformation geschieht.

Es sei

$$\omega = S(y) = \frac{\alpha_1 y^2 + 2\beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_0 y^2 + 2\beta_0 y + \gamma_0} \tag{45}$$

Da y, als Funktion von ω aufgefaßt, zweiwertig ist, so kann die Diskriminante dieser Gleichung zweiten Grades kein vollständiges Quadrat sein; d. h. die Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung

$$(\beta_1 - \omega\beta_0)^2 - (\alpha_1 - \omega\alpha_0)(\gamma_1 - \omega\gamma_0) = 0$$

sind sicher verschieden. Geben wir ω einen der beiden Werte, so wird der Zähler von $S(y) - \omega$ ein vollständiges Quadrat und somit ist

$$\frac{S(y) - \omega_1}{S(y) - \omega_2} = \left(\frac{py + q}{ry + s}\right)^2 \tag{46}$$

während

$$\frac{T(x) - \omega_1}{T(x) - \omega_2} = F(x) \tag{47}$$

wieder vom zweiten Grade ist. Schreibt man schließlich

$$\frac{py + q}{ry + s} = \eta, \quad \frac{px + q}{rx + s} = \xi \tag{48}$$

und setzt $F(x) = R(\xi)$, so besteht also zwischen den Modulfunktionen

$$\xi = \frac{px + q}{ry + s} = \psi(t) \text{ und } \eta = \psi(2t)$$

die Gleichung

$$\eta^2 = R(\xi) \tag{49}$$

wo $R(\xi)$ *rational vom zweiten Grade ist,* q. e. d.

Damit ist gezeigt, daß es stets möglich ist, zu einer Gruppe Γ, die die Bedingungen I, II und III erfüllt, einen Hauptmodul $\xi = \varphi(t)$ zu finden, der einer Modulargleichung von der Form (3) genügt.

Es handelt sich also darum Gruppen zu finden, die die drei Bedingungen erfüllen, und zwar wird man sich darauf beschränken müssen, dieselben unter den *Kongruenzgruppen* zu suchen. Es ist dann nicht schwer, die Bedingungen I und II zu erfüllen, doch wird i. A. die Bedingung III nicht gelten.

Wir schlagen daher den umgekehrten Weg ein, indem wir für eine ziemlich allgemeine Klasse von Kongruenzgruppen *Formeln zur Bestimmung des Geschlechtes* aufstellen, die auch für andere Unter-

suchungen Wert haben mögen. Hieraus werden dann diejenigen Gruppen vom Geschlecht 0 ausgeschieden, und zuletzt unter diesen diejenigen bestimmt, die überdies die Bedingungen I und II erfüllen.

Die allgemeine Klasse der zu untersuchenden Kongruenzgruppen charakterisieren wir wie folgt:

Es sei n eine natürliche Zahl > 1, es seien ferner h_1, h_2 zwei *Teiler* von n, deren Produkt durch n teilbar ist

$$h_1 \cdot h_2 = \sigma \cdot n \tag{a}$$

Wir betrachten dann die Gesamtheit der Modulsubstitutionen $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$, deren Koeffizienten den Kongruenzen genügen:

$$\left.\begin{array}{ll} \pm a \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_m & (mod\, n) \\ b \equiv 0 & (mod\, h_1) \\ c \equiv 0 & (mod\, h_2) \\ \pm d \equiv \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_m^{-1} & (mod\, n) \end{array}\right\} \tag{b}$$

$$ad - bc = 1$$

wobei die Zahlen $\alpha_1 = 1$, α_2, $\ldots\ldots \alpha_g$ in Bezug auf Multiplikation eine (*Abelsche*) Gruppe der Ordnung g bilden. Wir fassen diese Bedingung zusammen in dem Symbol

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha i, 0 \\ 0, \alpha i^{-1} \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} n, h_1 \\ h_2, n \end{bmatrix}\right) \tag{c}$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots g)$$

Da $\begin{pmatrix} -a, -b \\ -c, -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ ist, kann man die αi (oder die αi^{-1}) als positive ganze Zahlen kleiner oder gleich $\frac{n}{2}$ annehmen. Aus der Gruppeneigenschaft der αi folgt sofort, daß die Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha i, & 0 \\ 0, & \alpha i^{-1} \end{pmatrix}$ eine Gruppe bilden und damit, wegen (b), auch die Substitutionen $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$. Wir bezeichnen diese Gruppe für den Moment mit Γ_0. Wir zeigen nun, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h_2 = n$ annehmen können.

Genügt nämlich die zu Γ_0 gehörige Funktion $\varphi(t)$ der Gleichung (7): $\varphi^2(2t) = R[\varphi(t)]$, so ist dies auch der Fall mit der Funktion $\psi(t) = \varphi\left(\frac{n}{h_2} t\right)$. Diese gehört zu der transformierten Gruppe $\Gamma_0' = \frac{h_2}{n} \Gamma_0 \frac{n}{h_2}$,

deren Substitutionen die Form haben

$$\begin{pmatrix} a & , \frac{h_1}{n} b \\ \frac{n}{h_1} c, & d \end{pmatrix}$$

Nun sind nach (a) und (b) sowohl $\frac{h_1}{n} b$ als auch $\frac{n}{h_1} c$ ganze Zahlen und die zweite zudem teilbar durch n. Wir ersetzen also künftig die Bedingung (b) durch die einfachere:

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i, & 0 \\ 0 , & \alpha i^{-1} \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} n, h \\ n, n \end{bmatrix} \right) \qquad (50)$$

und bezeichnen die Gruppe genauer mit dem Symbol $\Gamma^{(g)}_{n,h}$. Dabei bedeutet g die Ordnung der Gruppe, die halb so groß oder gleich der Anzahl der αi ist, je nachdem unter diesen die Zahl (—1) vorkommt oder nicht. h könnte irgend eine ganze Zahl sein. Wir beschränken uns aber auf den Fall, daß *h ein Teiler von n* ist.

Um zu gegebenem n alle Gruppen dieser Art zu erhalten, gehen wir davon aus, daß es wegen der Gruppeneigenschaft der αi einen *kleinsten Exponenten* ν gibt, für den sämtliche αi der Kongruenz genügen.

$$x^\nu \equiv 1 \ (mod\ n) \qquad (51)$$

wobei ν ein Teiler der Zahl $\varphi(n)$ ist. Umgekehrt gibt es zu jedem Teiler von $\varphi(n)$, der $(mod\ n)$ primitive Wurzeln besitzt, eine oder mehrere *Abelsche* Gruppen.

Beispiel: Für $n = 24$ ist $\varphi(n) = 8$. Die 8 teilerfremden Reste ± 1, ± 5, ± 7, ± 11, genügen alle der Kongruenz

$$x^2 \equiv 1 \ (mod\ 24)$$

Zu $\nu = 2$ gibt es daher drei Gruppen zweiter Ordnung:

$$(1,5), \quad (1,7), \quad (1,11)$$

wenn wir nur die positiven Reste kleiner als $\frac{n}{2}$ wählen, und eine Gruppe vierter Ordnung

$$(1,\ 5,\ 7,\ 11)$$

Das Beispiel zeigt, daß die Bezeichnung $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ nicht eindeutig ist, doch ist sie für unsere Zwecke ausreichend.

Die nachstehende Tabelle gibt uns eine Uebersicht über die Gruppen der 1sten bis 30sten Stufe.

n	$\varphi(n)$	h	ν	g	$\pm a_i$
2	1	1, 2	1	1	1
3	2	1, 3	2	1	1
4	2	1, 2, 4	2	1	1
5	4	1, 5	2	1	1
			2	2	1, 2
6	2	1, 2, 3, 6	2	1	1
7	6	1, 7	2	1	1
			6	3	1, 2, 3
8	4	1, 2, 4, 8	2	1	1
			2	2	1, 3
9	6	1, 3, 9	2	1	1
			6	3	1, 2, 4
10	4	1, 2, 5, 10	2	1	1
			2	2	1, 3
11	10	1, 11	2	1	1
			10	5	1, 2, 3, 4, 5
12	4	1, 2, 3, 4, 6, 12	2	1	1
			2	2	1, 5
13	12	1, 13	2	1	1
			2	2	1, 5
			6	3	1, 3, 4
			6	6	1, 2, 3, 4, 5, 6
14	6	1, 2, 7, 14	2	1	1
			4	3	1, 3, 5
15	8	1, 3, 5, 15	2	1	1
			2	2	1, 4
			4	4	1, 2, 4, 7
16	8	1, 2, 4, 8, 16	2	1	1
			2	2	1, 7
			4	4	1, 3, 5, 7
17	16	1, 17	2	1	1
			2	2	1, 4
			4	4	1, 2, 4, 8
			8	8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

n	$\varphi(n)$	h	ν	g	$\pm ai$
18	6	1, 2, 3, 6, 9, 18	2	1	1
			6	3	1, 5, 7
19	18	1, 19	2	1	1
			6	3	1, 7, 8
			18	9	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
20	8	1, 2, 4, 5, 10, 20	2	1	1
			2	2	1, 9
			4	4	1, 3, 7, 9
21	12	1, 3, 7, 21	2	1	1
			2	2	1, 8
			6	3	1, 4, 5
			6	6	1, 2, 4, 5, 8, 10
22	10	1, 2, 11, 22	2	1	1
			10	5	1, 3, 5, 7, 9
23	22	1, 23	2	1	1
			22	11	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
24	8	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	2	1	1
			2	2	1, 5
			2	2	1, 7
			2	2	1, 11
			2	4	1, 5, 7, 11
25	20	1, 5, 25	2	1	1
			2	2	1, 7
			10	5	1, 4, 6, 9, 11
			10	10	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12
26	12	1, 2, 13, 26	2	1	1
			2	2	1, 5
			6	3	1, 3, 9
			6	6	1, 3, 5, 7, 9, 11
27	18	1, 3, 9, 27	2	1	1
			6	3	1, 8, 10
			18	9	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13

n	$\varphi(n)$	h	ν	g	$\pm \alpha_i$
28	12	1, 2, 4, 7, 14, 28	2	1	1
			2	2	1, 13
			6	3	1, 3, 9
			6	6	1, 3, 5, 9, 11, 13
29	28	1, 29	2	1	1
			2	2	1, 12
			14	7	1, 4, 5, 6, 7, 9, 13
			14	14	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
30	8	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	2	1	1
			2	2	1, 11
			4	4	1, 7, 11, 13

§ 3. Der Index der Kongruenzgruppen n^{ter} Stufe.

Die vollständige Modulgruppe, die wir von jetzt an mit Γ bezeichnen, läßt sich nach ihren Untergruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ in eine Summe von Nebengruppen zerlegen:

$$\Gamma = \Gamma_{n,h}^{(g)} + \Gamma_{n,h}^{(g)} V_2 + \ldots\ldots + \Gamma_{n,h}^{(g)} V_\mu \qquad (52)$$

deren Anzahl $\mu = \mu^{(g)}(n,h)$ der *Index* von $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ (relativ Γ) heißt. Die Gruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ selbst enthält wieder $\Gamma_{n,h}^{(1)} = \Gamma_{n,h}$ als ausgezeichnete Untergruppe oder Normalteiler, und die sämtlichen $\Gamma_{n,h}$ (bei festem n) enthalten als gemeinsamen Normalteiler $\Gamma_{n,n}$, die sogenannte *Hauptkongruenzgruppe* n^{ter} Stufe.

Es ist die Aufgabe dieses Paragraphen, die Indizes dieser Gruppen relativ Γ zu berechnen.

Für $\Gamma_{n,n}$ ist dieser Index bekannt, nämlich, wenn $p_1, p_2, \ldots p_r$ die Primteiler von n sind:

$$\mu(n,n) = \frac{n^3}{2}\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right) \qquad (53)$$

Reduziert man die Elemente von Γ in der Zerlegung von

$$\Gamma = \Gamma_{n,n} + \Gamma_{n,n} V_2 + \ldots\ldots + \Gamma_{n,n} V_{\mu(n,n)} \qquad (54)$$

nach dem Modul n und bezeichnet das reduzierte V_k mit v_k, so sieht man, daß alle Substitutionen von $\Gamma_{n,n} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ und alle Substitutionen der k^{ten} Nebengruppe $\Gamma_{n,n}\, V_k \equiv v_k = \begin{pmatrix} a_k, & b_k \\ c_k, & d_k \end{pmatrix}$ sind, worin a_k, b_k, c_k, d_k positive Zahlen kleiner als n sind, für welche

$$a_k d_k - b_k c_k \equiv 1 \,(mod\, n) \tag{55}$$

ist. Die v_k heißen *reduzierte Substitutionen* und ihre Gesamtheit bildet (nach *Klein-Fricke*) die *reduzierte Gruppe* $G_{n,n}$.

Umgekehrt gibt es zu jeder solchen reduzierten Matrix kongruente Modulsubstitutionen, sodaß also die endliche Gruppe $G_{n,n}$ die vollständige Modulgruppe Γ vertritt.

Zum Zweck der Abzählung ordnen wir die Elemente von $G_{n,n}$ in ein rechtwinkliges Schema, indem wir als *erste Zeile* wählen:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} 1, & h-1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1, & h \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} 1, & 2h-1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2h \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \begin{pmatrix} 1, & n-1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält die weitern Zeilen, indem man irgend eine in den vorhergehenden Zeilen nicht enthaltene Substitution $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ von links mit den Elementen der ersten Zeile multipliziert, wobei der dritte und vierte Koeffizient erhalten bleiben:

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ c\ , & d \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{h-1}, & b_{h-1} \\ c\ , & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_h, & b_h \\ c\ , & d \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{2h-1}, & b_{2h-1} \\ c\ , & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{2h}, & b_{2h} \\ c\ , & d \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \begin{pmatrix} a_{n-1}, & b_{n-1} \\ c\ , & d \end{pmatrix}$$

Die Reihe enthält offenbar sämtliche inkongruenten Matrizen mit dem Paar (c, d), da die Kongruenz $ad - bc \equiv 1$ in Bezug auf a, b gerade n inkongruente Lösungen besitzt. (c, d) kann jedes Zahlenpaar sein, das mit n keinen gemeinsamen Teiler besitzt. Man sieht daraus, daß der Index $\mu\ (n, n)$ gleich n mal der Anzahl der zulässigen Zahlenpaare (c, d) ist, was zu der unten angegebenen Formel (56) führt.

Betrachten wir jetzt für irgend einen Teiler h von n die Gruppe $\Gamma_{n,h}$. Sie enthält die Substitution $\begin{pmatrix}1, h\\0, 1\end{pmatrix}$ und deren Potenzen, und also sind irgend zwei Modulsubstitutionen, die durch Multiplikation mit $\begin{pmatrix}1, h\\0, 1\end{pmatrix}$ in einander übergehen, relativ zu $\Gamma_{n,h}$ äquivalent. Geht man zu den reduzierten Substitutionen über, so sieht man, daß alle Elemente des obigen Schemas $G_{n,n}$ aus den h ersten Spalten hervorgehen, indem man diese von links mit den Potenzen von $\begin{pmatrix}1, h\\0, 1\end{pmatrix}$ multipliziert. Diese h Spalten bilden daher das, was wir die *mod* $\begin{pmatrix}n, h\\n, n\end{pmatrix}$ *reduzierte Gruppe* Γ heißen und mit $G_{n,h}$ bezeichnen. Die Matrix $\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}$ repräsentiert die Gruppe $\Gamma_{n,h}$, die andern Matrizen vertreten die Nebengruppen in der Entwicklung von Γ nach $\Gamma_{n,h}$. Daher ist die Ordnung von $G_{n,h}$ gleich dem Index von $\Gamma_{n,h}$ und somit gilt

$$\mu(n, h) = \frac{h}{n}\mu(n, n) \qquad (56)$$

Gehen wir endlich zur Gruppe $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ über, so entsprechen ihr im Schema $G_{n,h}$ die Substitutionen

$$\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\alpha_2, 0\\0, \alpha_2^{-1}\end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix}\alpha_g, 0\\0, \alpha_g^{-1}\end{pmatrix}$$

die also g relativ $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ äquivalente Substitutionen vertreten. Denkt man sich irgend eine Zeile von $G_{n,h}$ mit diesen Substitutionen multipliziert, so erhält man wieder je g äquivalente Substitutionen. Ein vollständiges Schema von nicht äquivalenten Zeilen aus $G_{n,h}$ wird dann mit $G^{(g)}_{n,h}$ bezeichnet und heißt die *mod* $\begin{pmatrix}\alpha i, & h\\n, & \alpha i^{-1}\end{pmatrix}$ *reduzierte Gruppe* Γ.

Ihre Ordnung und zugleich der Index von $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ ist offenbar:

$$\mu^{(g)}(n, h) = \frac{1}{g}\mu(n, h) = \frac{h}{n\,g}\mu(n, h) \qquad (57)$$

wo $\mu(n, n)$ durch die Formel (53) gegeben ist.

Als Beispiel diene die reduzierte Gruppe G_{55}:

$G_{51}^{(1)}$ — $G_{51}^{(2)}$ — G_{11}

$G_{51}^{(2)}$	10	10	10	10	10	04	30	30	30	30	30	03
	01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	20
	11	21	31	41	01	14	32	02	22	42	12	23
	01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	20
$G_{55}^{(2)}$	12	32	02	22	42	24	34	24	14	04	44	43
	01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	20
	13	43	23	03	33	34	31	41	01	11	21	13
	01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	20
	14	04	44	34	24	44	33	13	43	23	03	33
	01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	20

Dabei sind die Koeffizienten a, b, c, d der Substitutionen alle modulo 5 reduziert.

Diese G_{55} enthält 1 Substitution, die in Γ_{55} enthalten ist, nämlich: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Sie enthält 5 Substitutionen, die in Γ_{51} enthalten sind, nämlich:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$$

Sie enthält 2 Substitutionen, die in $\Gamma_{55}^{(2)}$ enthalten sind, nämlich:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Sie enthält endlich 10 Substitutionen, die in $\Gamma_{51}^{(2)}$ enthalten sind, nämlich:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&2\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&4\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&3\\0&2\end{pmatrix}$$

Es ist also der Index von:

$$\Gamma_{55}\colon\ \mu\ (5{,}5) = 60\colon\ 1 = 60$$
$$\Gamma_{51}\colon\ \mu\ (5{,}1) = 60\colon\ 5 = 12$$

$$\Gamma_{55}^{(2)}: \ \mu^{(2)}(5,5) = 60 : \ 2 = 30$$
$$\Gamma_{51}^{(2)}: \ \mu^{(2)}(5,1) = 60 : 10 = \ 6$$

§ 4. Die Anzahl der Ecken des Fundamentalbereiches.

Jeder Substitution von Γ entspricht in der komplexen Ebene ein Doppel-Dreieck der bekannten Modulteilung, speziell die Substitution $\left(\begin{smallmatrix}1,0\\0,1\end{smallmatrix}\right)$ gehört zum *Fundamentalbereich* (F.-B.) mit den Ecken i, ϱ, ∞. (Nach der Bezeichnung von *Klein*.) Alle Doppel-Dreiecke sind diesem F.-B. in Bezug auf Γ äquivalent, d. h. gehen aus ihm durch die Substitutionen von Γ hervor.

Ist Δ eine Untergruppe von endlichem Index, so nennen wir zwei Doppel-Dreiecke *äquivalent in Bezug auf* Δ, wenn das eine durch eine Substitution von Δ in das andere übergeht. Danach gibt es in Bezug auf Δ so viele nicht äquivalente Doppel-Dreiecke, als der Index μ beträgt. Durch geeignete Auswahl kann man erreichen, daß diese Doppel-Dreiecke einen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich bilden, den F.-B. der Gruppe Δ. Die Ränder dieses polygonalen Bereiches sind paarweise äquivalent. Heften wir zwei entsprechende Ränder zusammen, so erhalten wir *eine geschlossene Fläche*, der ein bestimmtes Geschlecht $p \geqq 0$ zukommt.

Im folgenden ist der F.-B. einer Gruppe immer als geschlossen gedacht. Die μ Doppel-Dreiecke, aus denen der F.-B. besteht, stoßen in einer Anzahl Ecken zusammen, von denen man drei Arten zu unterscheiden hat.

1. Es gibt Ecken, wir wollen sie mit „*i-Ecken*“ bezeichnen, die bezüglich der Modulgruppe $\Gamma_{1,1} = \Gamma$ zum Punkt $i = \sqrt{-1}$ äquivalent sind. Diese i-Ecken sind stets von 2 *oder* 4 *Elementar-Dreiecken* umlagert.

2. Es gibt Ecken, die bezüglich der Modulgruppe Γ zum Punkt $\varrho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ äquivalent sind. Diese *ϱ-Ecken* sind stets von 2 *oder* 6 *Elementar-Dreiecken* umlagert.

3. Es gibt Ecken, die bezüglich der Modulgruppe Γ zum Punkt ∞ äquivalent sind. Diese *∞-Ecken* sind stets von einer *geraden Anzahl Elementar-Dreiecke* umlagert.

Ist z. B. die vorgelegte Untergruppe die Hauptkongruenzgruppe, $\Gamma_{n,n}$, so wissen wir nach *Klein-Fricke*, daß *sämtliche* i-Ecken von 4, *sämtliche* ϱ-Ecken von 6 und *sämtliche* ∞-Ecken von $2n$ Elementar-Dreiecken umlagert sind.

Wir bezeichnen die Anzahl der i-Ecken mit ei; die Anzahl der ϱ-Ecken mit e_ϱ, und die Anzahl der ∞-Ecken mit e_∞, dann ist also die Gesamtheit der Ecken des F.-B.

$$e = ei + e_\varrho + e_\infty \tag{58}$$

Das Ziel der folgenden Paragraphen ist die Ermittlung der Anzahl dieser Ecken für jede Kongruenzgruppe. Dabei wird uns die reduzierte Gruppe $G^{(g)}_{n,h}$ wiederum gute Dienste leisten.

Wenden wir diese Betrachtungen auf die Gruppe $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ an, so besteht also der zugehörige F.-B. aus $\mu^{(g)}(n,h)$ Doppel-Dreiecken. Die Substitutionen V_k, die denselben entsprechen, bilden ein System relativ $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ nicht äquivalenter Substitutionen und ihre Reduktion *mod* n liefert gerade die oben eingeführte Gruppe $G^{(g)}_{n,h}$. Umgekehrt kann uns diese $G^{(g)}_{n,h}$ dazu dienen, die Zusammenhangsverhältnisse des F.-B. zu erschließen. Wir beginnen damit die Zahlen ei, e_ϱ, e_∞ für unsere Gruppen zu berechnen.

§ 5. Die Anzahl der i- und ϱ-Ecken.

Es seien $V_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$ zwei Substitutionen, deren entsprechende Doppeldreiecke um ein und dieselbe i-Ecke gelagert sind. Die eine Substitution, z. B. V_2, geht dann aus der anderen, V_1, hervor, indem man V_1 rechtseitig mit der Substitution $\omega' = -\frac{1}{\omega} = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix}$ multipliziert.

Es ist also

$$\begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \tag{a}$$

Wir betrachten hier nur Gruppen von der Form $\Gamma_{n,h}$, wo also $g = 1$ ist. Die beiden Substitutionen V_1 und V_2 gehören dann und nur dann derselben Repräsentantenklasse bezüglich der vorgelegten Gruppe $\Gamma_{n,h}$ an, wenn das Produkt $V_2 V_1^{-1}$ eine Substitution der Gruppe $\Gamma_{n,h}$ ist. Es muß dann also die Relation bestehen:

$$V_2 V_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_1, & b_1 \\ c_1, & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1, a_1 \\ -d_1, c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_1, & b_1 \\ c_1, & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} n, h \\ n, h \end{bmatrix} \right)$$

Die Vergleichung der Koeffizienten führt auf die Kongruenzen.

$$\left.\begin{aligned} -b\,d - a\,c &\equiv b\,d + a\,c \equiv 1 \,(mod\, n) \\ b^2 + a^2 &\equiv 0 \,(mod\, h) \\ d^2 + c^2 &\equiv 0 \,(mod\, n) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

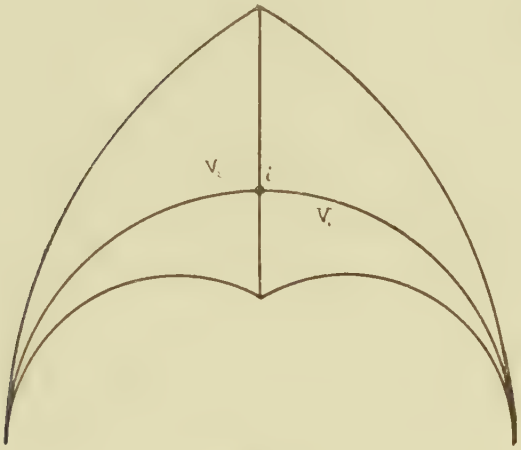

Fig. 1.

Aus der ersten Bedingung (b) folgt sofort $1 \equiv -1 \,(mod\, n)$ und daher außer der trivialen Lösung $n = 1$, welche auf die Modulgruppe Γ selbst führt, nur noch die einzige Möglichkeit $n = 2$. Zugleich muß der Ausdruck $bd + ac$ eine ungerade Zahl sein. Berücksichtigt man noch die beiden letzten Kongruenzen, so bleibt von den Möglichkeiten $(n = 2, h = 1)$ und $(n = 2, h = 2)$ nur die erste erfüllbar. Sie liefern die einzigen nicht trivialen Fälle, nämlich:

$$n = 2,\ h = 1 \ :\ a \equiv 1, b \equiv 0, c \equiv 1, d \equiv 1 \,(mod\, 2) \qquad \text{(c)}$$

Die Anzahl der Elementar-Dreiecke im F.-B. der $\Gamma_{2,1}$ ist nun aber $2\,\mu\,(2{,}1) = 6$. Von diesen sechs Dreiecken sind nach dem obigen zwei um *eine* i-Ecke und die anderen vier um *eine andere* i-Ecke gelagert, sodaß also die Anzahl der i-Ecken für den F.-B. der $\Gamma_{2,1}$: $ei = 2$ beträgt.

Für die Modulgruppe $\Gamma_{1,1}$ ist die Anzahl der i-Ecken gleich 1. Für alle übrigen Gruppen ist sie gleich $\frac{1}{2}\mu(n, h)$. Wir haben also den

Satz 1. *Die Anzahl der i-Ecken im Fundamentalbereich der Modulgruppe ist* $ei = \mu = 1$, *im Fundamentalbereich der Gruppe* $\Gamma_{2,1}$ *ist sie* $ei = 2$, *in den Fundamentalbereichen aller übrigen Gruppen* $\Gamma_{n,h}$ *ist diese Anzahl*

$$ei = \tfrac{1}{2}\mu(n, h). \tag{59}$$

Es sei nun $V_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$ und $V_3 = \begin{pmatrix} a_3, b_3 \\ c_3, d_3 \end{pmatrix}$ drei Substitutionen, deren entsprechende Doppeldreiecke um eine ϱ-Ecke gelagert sind, und zwar sei der Umlaufsinn der in der Fig. 2

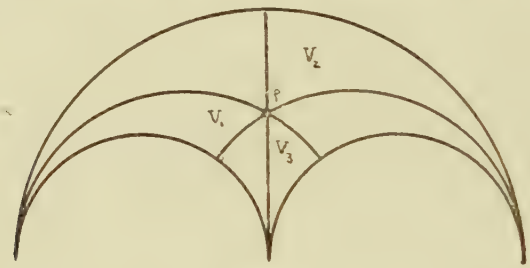

Fig. 2.

angezeigte Uhrzeigersinn. Die V_2 wird dann aus V_1 durch rechtseitige Multiplikation mit der Substitution $U = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix}$ erhalten. Von den Substitutionen V_1, V_2 und V_3 gehören daher entweder alle drei oder aber keine zu derselben Repräsentantenklasse bezüglich der Gruppe $\Gamma_{n,h}$. Im ersten Fall ist die betreffende Ecke von zwei Elementardreiecken, im anderen Fall von sechs solchen umlagert. Das erstere tritt ein, wenn V_1 und V_2 zu derselben Klasse der Repräsentanten gehören, d. h. also, wenn $V_2 V_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} n, h \\ n, n \end{bmatrix} \right)$ ist. Die Bedingungen hiefür können analog erhalten werden, wie für den Fall der i-Ecke. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} a\,d - b\,d - a\,c = 1 + b\,c - b\,d - a\,c &\equiv \pm 1 \,(mod\ n) \\ -a\,b + b^2 + a^2 &\equiv 0 \,(mod\ h) \\ d\,c - d^2 - c^2 &\equiv 0 \,(mod\ n) \\ b\,c + b\,d + a\,c &\equiv \pm 1 \,(mod\ n) \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

wobei beide Male entweder das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist.

Bei Annahme des oberen (positiven) Vorzeichens folgt aus den beiden ersten Bedingungen sofort $1 \equiv +2 \pmod{n}$, was nur für $n = 1$ möglich ist. Bei Annahme des unteren (negativen) Vorzeichens folgt $1 \equiv -2 \pmod{n}$, was wiederum nur für den Fall $n = 3$ möglich ist. Wie für den Fall der i-Ecke, muß dann zugleich $h = 1$ sein. Als einzige mögliche Substitutionen erweisen sich dann die nachstehenden:

$$\left.\begin{array}{l} n = 3\,,\ h = 1 : a \equiv 1,\ b \equiv 0,\ c \equiv -1,\ d \equiv 1 \pmod 3 \\ \qquad\qquad\quad a \equiv 0,\ b \equiv -1,\ c \equiv 1,\ d \equiv 1 \pmod 3 \\ \qquad\qquad\quad a \equiv 1,\ b \equiv 1,\ c \equiv 1,\ d \equiv -1 \pmod 3 \end{array}\right\} \quad \text{(e)}$$

Die diesen drei Substitutionen entsprechenden Doppeldreiecke sind dann gerade um ein und dieselbe ϱ-Ecke gelagert und bezüglich $\Gamma_{3,1}$ äquivalent. Nun ist die Anzahl der Elementar-Dreiecke im F.-B. der $\Gamma_{3,1}$: $2\mu(3,1) = 8$. Davon sind laut dem obigen zwei um ein und dieselbe ϱ-Ecke und die übrigen sechs um eine andere ϱ-Ecke gelagert, sodaß also die Gesamtzahl der ϱ-Ecken $e_\varrho = 2$ ist. Wir erhalten also den

Satz 2. *Die Anzahl der ϱ-Ecken im Fundamentalbereich der Modulgruppe ist $e_\varrho = 1$ und im Fundamentalbereich der Gruppe $\Gamma_{3,1}$: $e_\varrho = 2$. In den Fundamentalbereichen aller übrigen Gruppen $\Gamma_{n,h}$ ist die Anzahl*

$$e_\varrho = \tfrac{1}{3}\mu(n, h) \qquad (60)$$

§ 6. Die Anzahl der ∞-Ecken.

Es sei wiederum $V_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$ und $V_2 = \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$ zwei Substitutionen, deren entsprechende Doppeldreiecke, wie in der Figur angedeutet, im Gegenuhrzeigersinn, um eine ∞-Ecke gelagert sind. Man erhält dann V_2 aus V_1, indem man auf letztere die Substitution $\omega' = \omega + 1$ anwendet. Es ist also $V_2 = V_1 \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ die nächste Substitution $V_3 = V_2 \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} = V_1 \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ usw. Allgemein ist $V_{m+k} = V_m \begin{pmatrix} 1,k \\ 0,1 \end{pmatrix}$ oder also

$$\begin{pmatrix} a_{m+k}, b_{m+k} \\ c_{m+k}, d_{m+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m, b_m + k a_m \\ c_m, d_m + k c_m \end{pmatrix}$$

Es sei nun k die kleinste Zahl, für welche eine Substitution V_m mit der Substitution V_{m+k} in Bezug auf die vorgelegte Gruppe $\Gamma_{n,h}$ äquivalent ist. Dann trifft dies für jeden beliebigen Index m zu. Aus der Bedingung:

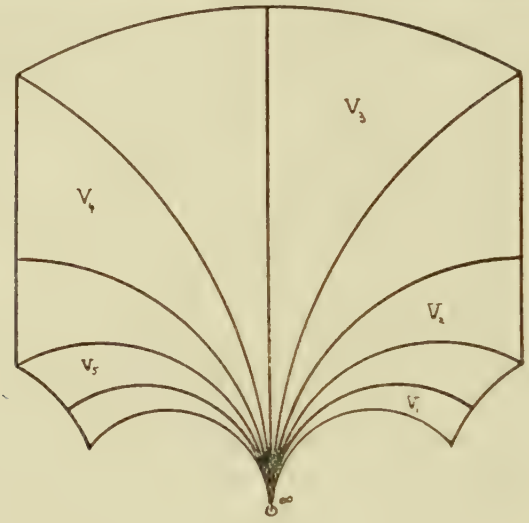

Fig. 3.

$$V_{m+k} V_m^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} n,h \\ n,n \end{bmatrix} \right)$$

für die Aequivalenz folgen dann u. a. die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 + ack &\equiv \pm 1 \ (mod\ n) \\ 1 - ack &\equiv \pm 1 \ (mod\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Wählen wir das obere Vorzeichen, so folgt $ack \equiv 0 \ (mod\ n)$. Wählen wir dagegen das untere Vorzeichen, so folgt das gleichzeitige Bestehen der Kongruenzen:

$$\left.\begin{aligned} ack &\equiv +2 \ (mod\ n) \\ ack &\equiv -2 \ (mod\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $n = 2$ oder 4 ist, von welchen beiden Möglichkeiten die erstere identisch ist mit $ack \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Als Ausnahmefall bleibt somit nur noch $n = 4$ bestehen. Für alle übrigen Fälle gelten die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} a^2 k &\equiv 0 \ (mod\ h) \\ ack &\equiv 0 \ (mod\ n) \\ c^2 k &\equiv 0 \ (mod\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Wir behandeln den Fall $n = 4$ vorweg. Für ihn lautet die mittlere Kongruenz $ack = 0$ oder $2 \pmod 4$. Wir brauchen nur die Fälle $h = 1$, 2, 4 zu betrachten, da $h = 3$ kein Teiler von 4 ist, und wir zum vorneherein Nicht-Teiler von n für h ausgeschlossen haben. Betrachtet man a, c, nur *mod* n, so kommen für (a, c) nur die wesentlich voneinander verschiedenen Werte (1,1); (1,2); (1,4); (2,1) und (0,1) in Frage. Aus den Kongruenzen (b) erhalten wir jetzt für k die Werte

		$h = 1$,	$h = 2$,	$h = 4$
$(a, c) = (1,1)$:	$k =$	4	4	4
$(a, c) = (1,2)$:	$k =$	1	2	4
$(a, c) = (1,4)$:	$k =$	1	2	4
$(a, c) = (2,1)$:	$k =$	4	4	4
$(a, c) = (4,1)$:	$k =$	4	4	4

Für $h = 2$ und $h = 4$ sind nicht nur die Kongruenzen (b) sondern auch (c) erfüllt. Die Gruppen $\Gamma_{4,2}$ und $\Gamma_{4,4}$ bilden somit keine Ausnahmefälle. Für den einzigen Ausnahmefall $\Gamma_{4,1}$ lauten die Substitutionen der durch sie induzierten Gruppe $G_{4,1}$:

$$\begin{pmatrix}1,0\\0,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,1\\0,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,2\\0,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1,3\\0,1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2,3\\1,0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0,3\\1,0\end{pmatrix}$$

Danach sind die den ersten vier Substitutionen entsprechenden Doppel-Dreiecke *zusammen um eine ∞-Ecke gelagert*, während die den beiden letzten Substitutionen entsprechenden Doppel-Dreiecke einzeln *je um eine ∞-Ecke gelagert* sind. Die Anzahl der ∞-Ecken im F.-B. der $\Gamma_{4,1}$ ist daher $e_\infty = 3$.

Gehen wir nun zum allgemeinen Fall $(n, h) \mid (4,1)$ zurück. Da a und c teilerfremd sind, so gibt es zwei Zahlenpaare (x, y) und (ξ, η) derart, daß

$$\begin{aligned} xa^2 + yc^2 &= 1 \text{ und} \\ \xi a \ + \eta c \ &= 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Es folgt daher aus den Kongruenzen (61)

$$\left.\begin{aligned} k = xa^2k + yc^2k &\equiv 0 \pmod h \\ \text{und} \qquad ck = \xi ack + \eta c^2 k &\equiv 0 \pmod n \end{aligned}\right\}$$

d. h. es ist $k = \lambda h$. Anderseits folgt aus der zweiten Kongruenz, wenn wir $[n, c] = \vartheta$ setzen: $n = \vartheta^* \vartheta$ und $c = c^* \vartheta$ also $c^* k \equiv 0 \pmod{\vartheta^*}$, wo nun $[c^*, \vartheta^*] = 1$, somit ist $k \equiv 0 \pmod{\vartheta^*}$, oder in Worten:

k ist das kleinste gemeinsame Vielfache von h und ϑ^*. Man erhält also e_∞, indem man zu jedem ϑ die Anzahl der zugehörigen Matrizen der $G_{n,h}$ bestimmt und diese Anzahl durch das entsprechende k dividiert.

1. Fall: $h = n$. Wir haben es hier mit einer Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe zu tun. Es ist also $k = n$. Im F.-B. der Hauptkongruenzgruppe sind somit je n Doppeldreiecke um eine ∞-Ecke gelagert und die Anzahl der ∞-Ecken ist daher wie bekannt:

$$e_\infty = \frac{1}{n}\mu(n, n) \tag{62}$$

2. Fall: $h = 1$. Hier ist $k = \vartheta^*$. Wir betrachten die $\mu(n, 1)$ reduzierten Substitutionen, die in dem Schema von $G_{n,n}$ die erste Spalte bilden (d. h. die Gruppe $G_{n,1}$). Jeder von ihnen entspricht ein Doppel-Dreieck mit einer ∞-Ecke im Punkt $x = \frac{a}{c}$. Alle Ecken, für die c das gleiche ϑ besitzt, sind von gleich viel, nämlich $k = \vartheta^*$ Doppel-Dreiecken umlagert. Um also e_∞ zu finden, bestimmt man für jeden Teiler ϑ von n die Anzahl der zugehörigen Substitutionen, dividiert diese Anzahl durch das entsprechende k und nimmt die Summe.

Soll c mit n den größten gemeinsamen Teiler ϑ haben, so muß es einen der Werte haben:

$$f_1\vartheta,\ f_2\vartheta_1 \ldots\ldots\ldots, f_q\vartheta$$

wo $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_q$ die sämtlichen zu $\vartheta^* = \frac{n}{\vartheta}$ teilerfremden Zahlen der Reihe 1, 2, $\ldots\ldots$ ϑ^* bedeuten, deren Anzahl $q = q(\vartheta^*)$ ist.

Da zu jedem zulässigen Wertepaar gerade eine Matrix von $G_{n,1}$ gehört, so genügt es, diese Paare abzuzählen. Weil aber (c, d) und $(n - c, n - d)$ dieselbe Substitution liefern, hat man von der so erhaltenen Zahl die Hälfte zu nehmen.

Zu jedem der obigen Werte von c kann nun für d jede der Zahlen 0, 1, 2, $\ldots\ldots$ $(n - 1)$ genommen werden, die zu n teilerfremd ist. Wegen $n = \vartheta^*\vartheta$ gibt es $\vartheta^* q(\vartheta)$ solcher Zahlen und somit ist die Anzahl der zum Teiler ϑ gehörigen Paare (c, d) gleich

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^*\varphi(\vartheta^*)\varphi(\vartheta)$$

Diese Zahl hat man also durch $k = \vartheta^*$ zu dividieren und über alle ϑ zu summieren und erhält so

$$e_\infty = \tfrac{1}{2}\sum_{\vartheta/n}\varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta^*) \tag{63}$$

Zugleich ergibt sich für den Index $\mu(n, n)$ die Darstellung

$$\mu(n, n) = \tfrac{1}{2} \sum_{\vartheta | n} \vartheta^* \varphi(\vartheta^*) \varphi(\vartheta) \tag{64}$$

aus der natürlich die Formel (53) wieder gewonnen werden kann.

3. Fall: $h > 1$ *ist Teiler von* n. k ist hier gleich dem kleinsten gemeinsamen Multiplum von h und ϑ^* und kann gleich $\varkappa_{\vartheta\vartheta^*}$ gesetzt werden. Die Ueberlegung ist dieselbe wie zuvor, nur daß man jetzt die Matrizen von $G_{n,h}$ (der h ersten Spalten von $G_{n,n}$) zu betrachten hat. Zu einem Wertepaar (c, d) gehören jetzt h Substitutionen, sodaß also die zu ϑ gehörige Anzahl gleich

$$\tfrac{1}{2} h \vartheta^* \varphi(\vartheta) \varphi(\vartheta^*)$$

ist. Dividiert man durch $k = \varkappa_{\vartheta\vartheta^*}$ und summiert, so folgt

$$e_\infty = \tfrac{1}{2} \sum_{\vartheta | n} \frac{1}{\varkappa_{\vartheta\vartheta^*}} \varphi(\vartheta^*) \varphi(\vartheta) \tag{65}$$

Da ϑ^* mit ϑ alle Teiler von n durchläuft, kann man auch schreiben:

$$e_\infty = \tfrac{1}{2} \sum_{\vartheta | n} \frac{1}{\varkappa_{\vartheta}} \varphi(\vartheta) \varphi(\vartheta^*) \tag{66}$$

wo also $\varkappa_\vartheta$ das kleinste gemeinsame Multiplum von h, ϑ ist.

Wir fassen das Resultat zusammen in dem

Satz 3. *Die Anzahl der* ∞*-Ecken im Fundamentalbereich der Modulgruppe ist* $e_\infty = 1$ *und im Fundamentalbereich der Gruppe* $\Gamma_{1,1}$: $e_\infty = 3$.

Für die Hauptkongruenzgruppen $\Gamma_{n,n}$ ist die Anzahl der ∞-Ecken

$$e_\infty = \frac{1}{n} \mu(n, n)$$

Für die Gruppen $\Gamma_{n,1}$ $(n \neq 4)$ ist sie

$$e_\infty = \tfrac{1}{2} \sum_{\vartheta | n} \varphi(\vartheta) \varphi(\vartheta^*)$$

und für die Gruppen $\Gamma_{n,h}$ $(h \neq 1)$ ist sie

$$e_\infty = \tfrac{1}{2} \sum_{\vartheta | n} \frac{1}{\varkappa} \varphi(\vartheta) \varphi(\vartheta^*)$$

§ 7. Der Fall $g \neq 1$.

Bisher wurde die Zahl der Ecken ausschließlich für Gruppen von der Form $\Gamma_{n,h}^{(1)}$ bestimmt. Ist dagegen $g \neq 1$, so können wir das Gefundene in der folgenden Weise verallgemeinern:

1. Die i-Ecken. Sollen zwei um eine i-Ecke gelagerte Doppel-Dreiecke äquivalent sein und ist $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ die repräsentierende Substitution, so muß die Substitution

$$\begin{pmatrix} bd + ac\ , & -(b^2 + a^2) \\ c^2 + d^2\ , & -(ac + bd) \end{pmatrix}$$

zur Gruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ gehören, d. h. es muß

$$\left.\begin{aligned} bd + ac &\equiv \alpha \pmod n \\ ac + bd &\equiv \alpha^{-1} \pmod n \\ a^2 + b^2 &\equiv 0 \pmod h \\ c^2 + d^2 &\equiv 0 \pmod n \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

sein, wo α und $\bar{\alpha}$ Wurzeln der Kongruenz $x^\nu \equiv 1 \pmod n$ sind und $\alpha\alpha^{-1} \equiv 1 \pmod n$ ist. Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \alpha^{-1} &\equiv 0 \pmod n \\ \alpha^2 + \alpha\alpha^{-1} \equiv \alpha^2 + 1 &\equiv 0 \pmod n \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Dies ist nur möglich, wenn n nur aus Primzahlen von der Form $(4k + 1)$ zusammengesetzt oder das Doppelte einer solchen Zahl ist und ν dabei einen geeigneten Wert besitzt.

Da $\alpha^4 \equiv 1 \pmod n$ ist, muß $2\ \nu$ durch 4 teilbar sein. Da anderseits nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Satz $\alpha^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ für jedes beliebige α, so muß ν ein Teiler von $\varphi(n)$ sein. Tatsächlich ist nun für jedes n, das die vorgeschriebene Form hat, $\varphi(n)$ durch 4 teilbar; denn in der Formel für $\varphi(n)$ tritt mindestens ein Faktor $(p - 1) = 4k$ auf. Die Kongruenz $\alpha^2 \equiv -1 \pmod n$ hat alsdann immer eine Lösung.

Nun wähle man c beliebig teilerfremd zu n und setze $d \equiv -\alpha c$, dann ist $c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod n$. Man wähle ferner b beliebig und setze $a \equiv \alpha(b + \bar{c})$ wo $c\bar{c} \equiv 1 \pmod n$, dann ist $ac + bd \equiv \alpha \equiv -\alpha$. Ferner kann stets erreicht werden, daß $ad - bc \equiv 1 \pmod n$ ist. Damit auch noch $a^2 + b^2 \equiv a^2 - \alpha^2 b^2 \equiv 0 \pmod h$ ist, muß $a^2 - \alpha^2 b^2$

$= (a + \alpha b)(a - \alpha b) \equiv (a + \alpha b)\,\alpha\,\bar{c} \equiv 0 \pmod{h}$ sein. Nun ist $\alpha\,\bar{c}$ teilerfremd zu n, folglich muß $(a + \alpha b)$ durch h teilbar sein. Für $h = 1$ trifft dies immer zu. Für $h \neq 1$ muß daher

$$(a + \alpha b) \equiv 0 \pmod{h}$$

und

$$(a - \alpha b) \equiv \alpha\,\bar{c} \pmod{h} \text{ sein,}$$

oder

$$2a \equiv \alpha\,\bar{c} \pmod{h}$$
$$2b \equiv -\bar{c} \pmod{h}$$

Ist n gerade, so ist die rechte Seite ungerade. Die Kongruenzen sind daher nur *für ungerades h lösbar*. Ist dagegen n ungerade, so sind die Kongruenzen stets lösbar.

Wir haben so gezeigt, wie man zu einem bestimmten n von der oben erwähnten Form die zugehörigen h und ν bestimmen kann. In der Reihe $n = 1$ bis 30 sind 1, 2, 5, 10, 13, 17, 25, 26, 29 solche Zahlen. Wir finden für sie:

$n = 5$	$g = 2$	$\alpha i = \pm 2$
$n = 10$	$g = 2$	$\alpha i = \pm 3$
$n = 13$	$g = 2, 6$	$\alpha i = \pm 5$
$n = 17$	$g = 2, 4, 8$	$\alpha i = \pm 4$
$n = 25$	$g = 2, 10$	$\alpha i = \pm 7$
$n = 26$	$g = 2, 6$	$\alpha i = \pm 5$
$n = 29$	$g = 2, 14$	$\alpha i = \pm 12$

Bezeichnen wir nun mit εi die Zahl der Doppel-Dreiecke, die *allein* um eine i-Ecke gelagert sind, und mit δi die Zahl der Doppel-Dreiecke, die *paarweise* um eine i-Ecke gelagert sind, so ist die Anzahl der i-Ecken

$$ei = \varepsilon i + \tfrac{1}{2}\,\delta i$$

andererseits ist

$$\varepsilon i + \delta i = \mu^{(g)}(n, h)$$

Daraus folgt:

$$ei = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon i + \tfrac{1}{2}\,\mu^{(g)}(n, h) \qquad (69)$$

2. Die ϱ-Ecken. Die Bedingungen dafür, daß drei um eine ϱ-Ecke gelagerte Dreiecke, deren repräsentierende Substitution $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ ist, äquivalent sind, lauten:

$$\left.\begin{aligned} ad - (ac + bd) &\equiv \alpha \pmod{n} \\ -bc + (ac + bd) &\equiv -\alpha^{-1} \pmod{n} \\ a^2 + b^2 - ab &\equiv 0 \pmod{h} \\ c^2 + d^2 - cd &\equiv 0 \pmod{n} \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \alpha^{-1} &\equiv 1 \,(mod\ n) \\ \alpha^2 - \alpha + 1 &\equiv 0 \,(mod\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Dies ist nur möglich, wenn n aus Primzahlen von der Form $(6k + 1)$ zusammengesetzt oder das Dreifache einer solchen Zahl ist, und ν einen geeigneten Wert besitzt. Wegen $(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) \equiv \alpha^3 + 1 \equiv 0 \,(mod\ n)$ oder also $\alpha^6 - \ldots + 1 \,(mod\ n)$ muß 2ν durch 6 teilbar sein. Tatsächlich ist nun für jedes n von der vorgeschriebenen Form $\varphi(n)$ durch 6 teilbar, da es mindestens einen Faktor $(p - 1) = 6k$ enthält. Die Kongruenz $\alpha^3 \equiv -1 \,(mod\ n)$ hat also immer eine Lösung. Nun wähle man c beliebig teilerfremd zu n und a ganz beliebig.

Ferner setze man $d = +ac$ und $b = +\alpha a + \bar{c}$, wo $c\bar{c} \equiv 1 \,(mod\ n)$ ist, dann ist

$$c^2 + d^2 - cd \equiv 0 \,(mod\ n) \quad \text{und}$$
$$ad - (ac + bd) \equiv \alpha \,(mod\ n)$$

Für $h = 1$ ist es immer möglich, zugehörige a, b, c, d zu finden, ist dagegen $h \neq 1$, so muß überdies die Kongruenz: $a^2 + b^2 - ab \equiv 0 \,(mod\ h)$ erfüllt sein.

In der Reihe $n = 1$ bis 30 sind nun 1, 3, 7, 13, 19, 21 solche Zahlen, die den obengenannten Bedingungen für n genügen. Wir finden für sie:

$n = 7$	$g = 3$	$\alpha_i = -2, 3$
$n = 13$	$g = 3, 6$	$\alpha_i = -3, 4$
$n = 19$	$g = 3, 9$	$\alpha_i = -7, 8$
$n = 21$	$g = 3, 6$	$\alpha_i = -4, 5$

Für jedes Doppel-Dreieck des F.-B., das *allein* um eine ϱ-Ecke gelagert ist, erhöht sich die Zahl der ϱ-Ecken um $\frac{2}{3}$ gegenüber der normalen Anzahl $\frac{1}{3}\mu$.

Existieren also im F.-B. ε_ϱ solche Doppel-Dreiecke, so ist die Zahl der ϱ-Ecken

$$e_\varrho = \tfrac{2}{3}\,\varepsilon_\varrho + \tfrac{1}{3}\,\mu^{(g)}(n, h) \qquad (72)$$

3. Die ∞-Ecken. Die Bedingung für die Aequivalenz zweier um eine ∞-Ecke gelagerter Doppel-Dreiecke, deren repräsentierende Substitutionen

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a, b + ka \\ c, d + kc \end{pmatrix} \quad \text{sind, lauten:}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 + ack &\equiv \alpha \pmod n \\ 1 - ack &\equiv \bar{\alpha} \pmod n \\ a^2k &\equiv 0 \pmod h \\ c^2k &\equiv 0 \pmod n \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

Es folgt daraus:

$$\alpha + \bar{\alpha} \equiv 2 \pmod n \text{ oder also}$$
$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)^2 \equiv 0 \pmod n \qquad (74)$$

Diese Kongruenz hat außer $\alpha \equiv 1 \pmod n$ nur dann noch weitere Lösungen, nämlich $\alpha \equiv 1 \pmod{qN}$, wenn n einen quadratischen Teiler besitzt, $n = Nq^2$. Ist dies nicht der Fall, so stimmen die Bedingungen mit (61) überein. Nach Satz 3 auf Seite 33 ist alsdann die Zahl der ∞-Ecken durch

$$e_\infty = \frac{h}{2g} \Sigma \frac{1}{\varkappa_i} \varphi(\vartheta_i) \varphi(\vartheta_i^*) \qquad (75)$$

gegeben.

Falls aber $n = N q^2$ ist, gilt die Formel (75) auch noch, sofern man nur die k_i und damit die $\varkappa_i$ den nachstehenden Ausführungen entsprechend bestimmt. In der Reihe der Zahlen $n = 1$ bis 30 sind die folgenden von der Form $n = N q^2$: 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28. Anhand der Tabelle auf Seite 19 ff. finden wir:

$n = 8$	$g = 2$	$\alpha_i = 5$
$n = 9$	$g = 3$	$\alpha_i = 4, 7$
$n = 12$	$g = 2$	$\alpha_i = 7$
$n = 16$	$g = 2$	$\alpha_i = 9$
	$g = 4$	$\alpha_i = 5, 9, 13$
$n = 18$	$g = 3$	$\alpha_i = 7, 13$
$n = 20$	$g = 2, 4$	$\alpha_i = 11$
$n = 24$	$g = 2, 4$	$\alpha_i = 13$
$n = 25$	$g = 5, 10$	$\alpha_i = 6, 11, 16, 21$
$n = 27$	$g = 3, 9$	$\alpha_i = 10, 19$
$n = 28$	$g = 2, 6$	$\alpha_i = 15$

In diesem Fall ist k wie folgt zu bestimmen:

Wir setzen $\alpha - 1 = p\,q\,N$, wo p und q teilerfremd sind, also
$[p, q] = 1$. Ferner sei
$[c, q] = t$, $[\frac{c}{t}, N] = \Theta$ also
$c = c^* \Theta\, t$, $N = N^* \Theta$, $q = q^* t$, wobei nunmehr
$[c^* \Theta, q^*] = 1$, $[c^*, N^*] = 1$.

Dann ergibt sich aus den k bestimmenden Kongruenzen:

$$\left.\begin{aligned} a^2 k &\equiv 0 \ (mod\ h) \\ ac\, k &\equiv a-1 \ (mod\ N\, q^2) \\ c^2 k &\equiv 0 \ (mod\ N\, q^2) \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

$$c^2 k \equiv c^{*2} \Theta^2 t^2 k \equiv 0 \ (mod\ N^* q^{*2} \Theta t^2)$$

also

$$c^{*2}\, \Theta\, k \equiv 0 \ (mod\ N^* q^{*2} t) \qquad (77)$$

k kann also auf die Form

$$k = \lambda N^* q^{*2} \text{ gebracht werden.}$$

Ferner folgt:

$$ac\, k = a\, c^*\, q^{*2}\, N^*\, \Theta\, t \equiv p\, q^*\, N^* \Theta t \ (mod\ N^* q^{*2} \Theta t), \text{ also:}$$

$$\lambda ac^*\, q^* \equiv p \ (mod\ q^*\, t) \qquad (78)$$

Da aber q^* teilerfremd zu p ist, kann q^* nur gleich 1 sein, woraus $q = t$ und $c = c^* q$ folgt. Außerdem muß $[ac^*, q] = 1$ sein.

Wegen $a^2 k \equiv 0 \ (mod\ h)$ muß $\lambda a^2 N^*$ durch h teilbar sein. Nun ist also:

$$k = \lambda N^* \qquad (79)$$

Man bestimme also derart zu jedem α_i das zugehörige k_i. Das kleinste dieser k_i ist dann das definitiv zu (c, a) gehörige k.

§ 8. Das Geschlecht p einer Kongruenzgruppe.

Wir haben im § 2 der vorliegenden Arbeit als dritte Bedingung für das Bestehen der Gleichung (6): $x_1^2 = R(x)$ verlangt, daß die Substitutionsgruppe für diese Modulargleichung das Geschlecht $p = 0$ aufweise. Dies hat seinen Grund im folgenden Satz[1]): *Alle zu einer Gruppe gehörenden algebraischen Moduln, sowie alle algebraischen Moduln, die einer umfassenderen Untergruppe angehören, drücken sich für $p = 0$ durch den Hauptmodul, andernfalls durch die Moduln des vollen Systems rational aus.* Wir wollen also versuchen, das Geschlecht p einer beliebigen Kongruenzgruppe $\Gamma^{(q)}_{n,h}$ zu bestimmen. Ist uns dies gelungen, so brauchen wir nur aus der Menge dieser p die $p = 0$ auszusuchen und ihre zugehörigen Gruppen auf die zwei ersten Bedingungen des § 2 hin zu untersuchen. Nun ist nach dem verallgemeinerten *Eulerschen Polyedersatz*

$$e + s = k - 2p + 2 \qquad (80)$$

[1]) *F. Klein:* Ges. math. Abh. III. Bd., pag. 172.

wo e die Zahl der Ecken, s die Zahl der Seitenflächen, k die Zahl der Kanten und p das Geschlecht des Polyeders bedeutet. Dabei kann der an seinen entsprechenden Rändern zusammengeheftete F.-B. der $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ als Polyeder von der Eckenzahl $e = ei + e_\varrho + e_\infty$, der Seitenflächenzahl $s = 2\mu^{(g)}(n,h)$ und der Kantenzahl $k = 3\mu^{(g)}(n,h)$ aufgefaßt werden. Das Geschlecht $p = p^{(g)}(n,h)$ der Gruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ ist also bestimmt durch

$$p^{(g)}(n,h) = 1 + \tfrac{1}{2}\mu^{(g)}(n,h) - \tfrac{1}{2}(e_\infty + e_\varrho + ei) \qquad (81)$$

Betrachten wir vorweg die Sonderfälle der §§ 5 und 6.

Das Geschlecht der Modulgruppe $\Gamma_{1,1}$ ist bekanntlich $p(1,1) = 0$.

Für die Gruppe $\Gamma_{2,1}$ finden wir $\mu(2,1) = 3, ei = 2, e_\varrho = 1, e_\infty = 2$ und daher $p(2,1) = 0$.

Für die Gruppe $\Gamma_{3,1}$ finden wir $\mu(3,1) = 4, ei = 2, e_\varrho = 2, e_\infty = 2$ und daher $p(3,1) = 0$.

Für die Gruppe $\Gamma_{4,1}$ finden wir $\mu(4,1) = 6, ei = 3, e_\varrho = 2, e_\infty = 3$ und daher $p(4,1) = 0$.

Für alle übrigen Gruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ gilt für das Geschlecht die Gleichung:

$$p^{(g)}(n,h) = 1 + \frac{1}{12}\mu^{(g)}(n,h) - \left(\frac{1}{4}\varepsilon i + \frac{1}{3}\varepsilon_\varrho\right) - \frac{h}{4g}\Sigma\frac{1}{\varkappa i}\varphi(\vartheta i)\varphi(\vartheta i^*) \qquad (82)$$

wobei ε_i und ε_ϱ die Anzahl der Lösungen der Kongruenzen (68) resp. (71) bedeuten [1]), und zwar ist $\varepsilon_i = 2^r$ und $\varepsilon_\varrho = 2^s$, wo r die Zahl der Primteiler von der Form $(4k+1)$, s die Zahl der Primteiler von der Form $(6k+1)$ die in n enhalten sind, bedeuten.

Speziell erhält man für die *Hauptkongruenzgruppe* die bekannte Formel

$$p(n,n) = 1 + \frac{1}{12n}(n-6)\mu(n,n) \qquad (83)$$

Für die Gruppen von der Form $\Gamma_{n,1}$ gilt:

$$p(n,1) = 1 + \frac{1}{12}\mu(n,1) - \frac{1}{4}\Sigma\varphi(\vartheta i)\varphi(\vartheta i^*) \qquad (84)$$

Wir haben im vorhergehenden für das Geschlecht der Gruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ eine allgemeine Formel aufgestellt. In dem komplizierteren Fall

[1]) *L. Kiepert:* Math. Ann. Bd. 32, pag. 40 ff. — *F. Klein:* Elliptische Modulfunktionen Bd. 2, pag. 50 ff.

$g > 1$ haben wir danach für alle Stufenzahlen $n \leq 30$ das $p^{(g)}(n, h)$ numerisch berechnet. Im Fall $g = 1$ läßt sich aber die Formel für verschiedene Kategorien von Gruppen leicht auswerten, was im nächsten Paragraphen an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

§ 9. Ueber einige spezielle Gruppen.

Die Formel (82) zur Bestimmung des Geschlechtes p einer Gruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ ist im allgemeinen nicht sehr leicht numerisch auszuwerten. Die Summe $\Sigma \frac{1}{\varkappa} \varphi(\vartheta_i) \varphi(\vartheta_i^*)$ jedoch, deren Auswertung am meisten Schwierigkeiten bietet, läßt sich in einer ganzen Reihe von Fällen in einfachere Formen bringen.

a) *Es sei* $n = q + 2 + 3$ eine Primzahl. h kann dann die Werte 1 und q annehmen. Der Index von $\Gamma_{q,1}$ ist $\mu(q, 1) = \frac{1}{2}(q^2 - 1)$ und daher $\mu(q, q) = \frac{1}{2} q (q^2 - 1)$. Ferner ist $\Sigma \varphi(\vartheta_i) \varphi(\vartheta_i^*) = 2 \varphi(1) \varphi(q) = 2(q-1)$ Wir finden damit das Geschlecht p einer Gruppe von Primzahlstufe mit

$$p(q, q) = 1 + \frac{1}{24}(q - 6)(q^2 - 1)$$

und

$$p(q, 1) = 1 + \frac{1}{24}(q - 11)(q - 1)$$

Die Kongruenzgruppen von Primzahlstufen sind übrigens schon mehrfach Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen, und zwar bezogen sich diese Untersuchungen zum Teil auch noch auf andere als nur gerade die hier betrachteten Gruppen von der Form $\Gamma_{q,q}$ und $\Gamma_{q,1}$.[1])

b) *Es sei* $n = q^2$ ein Primzahlquadrat. h kann dann nur die Werte 1, q und q^2 annehmen. Wir finden für die Indizes die Formeln:

$$\mu(q^2, 1) = \frac{q^2}{2}(q^2 - 1)$$

$$\mu(q^2, q) = \frac{q^3}{2}(q^2 - 1)$$

$$\mu(q^2, q^2) = \frac{q^4}{2}(q^2 - 1)$$

[1]) *F. Klein:* Ges. math. Abh. Bd. III. — *J. Gierster:* Math. Ann. 22, pag. 178 ff.

und für das Geschlecht die Gleichungen:

$$p(q^2, q^2) = 1 + \frac{q^2}{24}(q^2 - 6)(q^2 - 1)$$

$$p(q^2, q) = 1 + \frac{q}{24}(q - 1)(q^2 + q - 12)$$

$$p(q^2, 1) = 1 + \frac{1}{24}(q - 1)(q^3 + q^2 - 18q + 6)$$

c) *Es sei* $n = q^\alpha$ eine Primzahlpotenz. Dann kann h die Werte $1, q, q^2 \ldots\ldots\ldots q^\alpha$ annehmen. Die Indizes $\mu(n, h)$, $(h = q^\beta)$ der verschiedenen Gruppen $\Gamma_{n,h}$ sind durch die Formeln gegeben:

$$\mu(q^\alpha, q^\beta) = \tfrac{1}{2} q^{2\alpha+\beta-2}(q^2 - 1) \text{ wo } \beta \leqq \alpha \text{ ist.}$$

Das Geschlecht ist daher gegeben durch:

$$p(q^\alpha, q^\alpha) = 1 + \frac{1}{24} q^{2\alpha-2}(q^\alpha - 6)(q^2 - 1)$$

$$p(q^\alpha, q^\beta) = 1 + \frac{1}{24} q^{\alpha+\beta-2}(q-1)(q^\alpha[q+1] - 6[(\alpha-\beta+1)q - (\alpha-\beta-1)])$$

$$p(q^\alpha, 1) = 1 + \frac{1}{24} q^{\alpha-2}(q-1)(q^\alpha[q+1] - 6[(\alpha+1)q - (\alpha-1)])$$

d) *Es sei* $n = q_1 q_2$ ein Produkt aus zwei verschiedenen Primzahlen. h kann dann die Werte $1, q_1, q_2, q_1 q_2$ annehmen. Die Indizes der zugehörigen Gruppen sind

$$\mu(q_1 q_2, 1) = \tfrac{1}{2}(q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1)$$
$$\mu(q_1 q_2, q_1) = \tfrac{1}{2} q_1 (q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1)$$
$$\mu(q_1 q_2, q_2) = \tfrac{1}{2} q_2 (q_1^2 - 1)(q_2 - 1)$$
$$\mu(q_1 q_2, q_1 q_2) = \tfrac{1}{2} q_1 q_2 (q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1)$$

Die Geschlechter der zugehörigen Gruppen sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$p(q_1 q_2, q_1 q_2) = 1 + \frac{1}{24}(q_1 q_2 - 6)(q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1)$$

$$p(q_1 q_2, q_1) = 1 + \frac{1}{24}(q_1^2 - 1)(q_2 - 1) - (q_1 q_2 + q_1 - 12)$$

$$p(q_1 q_2, 1) = 1 + \frac{1}{24}(q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1) - (q_1 - 1)(q_2 - 1)$$

e) *Es sei* $n = q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_s$ ein Produkt aus s voneinander verschiedener Primzahlen. (n enthält keine Primzahlpotenz.) h kann das Pro-

dukt aus einer beliebigen Gruppe dieser s Primzahlen sein. Wir nehmen an, daß h das Produkt aus den r ersten Primzahlen in der Reihe $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots q_s$ sei. Also: $h = q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_r$, was man stets durch geeignete Numerierung der s Primzahlen erreichen kann. Es ist dann

$$\mu(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_s, q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_r)$$
$$= \tfrac{1}{2} q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_r (q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1)(q_3^2 - 1) \ldots\ldots (q_s^2 - 1)$$

Die Formeln für das Geschlecht sind

$$p(n, n) = 1 + \frac{1}{24}(n-6)(q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1) \ldots\ldots\ldots (q_s^2 - 1)$$

$$p(n, h) = 1 + \frac{h}{24}(q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1) \ldots (q_s^2 - 1)$$
$$- 2^{s-r-2} \lambda(h)(q_1 - 1)(q_2 - 1) \ldots\ldots (q_s - 1)$$

$$p(n, 1) = 1 + \frac{1}{24}(q_1^2 - 1)(q_2^2 - 1) \ldots (q_s^2 - 1) - 2^{s-2}(q_1 - 1)(q_2 - 1) \ldots (q_s - 1)$$

Außer den soeben behandelten Gruppen, für welche durchwegs $g = 1$ war, sei noch an je einem Beispiel für $g \neq 1$ ausführlich die Zahl der i-, ϱ- und ∞-Ecken bestimmt. Für die übrigen Gruppen, die in § 7 erwähnt sind, geben wir nur die Resultate an.

1. $n = 5$. n ist Primzahl von der Form $(4k+1)$. Wir schreiben uns sämtliche 60 Substitutionen der reduzierten Gruppe $G_{55}^{(1)}$ auf und zwar derart, daß die Unterteilung in die Gruppen $G_{55}^{(2)}$, $G_{51}^{(1)}$ und $G_{52}^{(2)}$ ersichtlich ist.

		$G_{51}^{(1)}$											
		$G_{51}^{(2)}$											
		G_{11}											
$G_{55}^{(2)}$	$G_{51}^{(2)}$	10	10	10	10	10	04	30	30	30	30	30	03
		01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	22
		11	21	31	41	01	14	32	02	22	42	12	23
		01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	22
		12	32	02	22	42	24	34	24	14	04	44	43
		01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	22
		13	43	23	03	33	43	31	41	01	11	21	13
		01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	22
		14	04	44	34	24	44	33	13	43	23	03	33
		01	11	21	31	41	10	02	22	42	12	32	22

Die unterstrichenen Substitutionen erfüllen dann die Bedingungen:

$$ac + bd \equiv \pm 2 \,(mod\ 5)$$
$$c^2 + d^2 \equiv \quad 0 \,(mod\ 5)$$

Die doppelt unterstrichenen erfüllen außerdem:

$$a^2 + b^2 \equiv \quad 0 \,(mod\ 5)$$

Von den ersten sind in der Gruppe $G_{51}^{(2)}$ von den letztern in der Gruppe $G_{55}^{(2)}$ zwei vorhanden. Jedesmal ist daher $\varepsilon i = 2$. Es folgt für:

$$\Gamma_{51}^{(2)} : ei = 1 + \tfrac{1}{2}\mu^{(2)}(5,1) = 4$$
$$\Gamma_{55}^{(2)} : ei = 1 + \tfrac{1}{2}\mu^{(2)}(5,5) = 16$$

Auf dieselbe Weise wird für die übrigen in Betracht fallenden Gruppen die folgende Tabelle erhalten:

$n = 5$		$h = 1$	5		
	$g = 2$	$ei = 4$	16		
$n = 10$		$h = 1$	2	5	10
	$g = 2$	$ei = 10$	18	46	90
$n = 13$		$h = 1$	13		
	$g = 2$	$ei = 24$	276		
	$g = 6$	$ei = 8$	92		
$n = 17$		$h = 1$	17		
	$g = 2$	$ei = 40$	616		
	$g = 4$	$ei = 20$	308		
	$g = 8$	$ei = 10$	154		
$n = 26$		$h = 1$	2	13	26
	$g = 2$	$ei = 66$	126	822	1638
	$g = 6$	$ei = 22$	42	274	546
$n = 29$		$h = 1$	29		
	$g = 2$	$ei = 112$	3052		
	$g = 14$	$ei = 16$	436		

2. $n = 7$. n ist Primzahl von der Form $(6k + 1)$. Wir schreiben uns wieder sämtliche 56 Substitutionen der reduzierten Gruppe $G_{77}^{(3)}$ auf:

	$G^{(3)}_{71}$							
$G^{(3)}_{71}$	10	10	10	10	10	10	10	06
	01	11	21	31	41	51	61	10
	11	21	31	41	51	61	01	16
	01	11	21	31	41	51	61	10
	12	32	52	02	22	42	62	26
	01	11	21	31	41	51	61	10
$G^{(3)}_{77}$	13	43	03	33	63	23	53	36
	01	11	21	31	41	51	61	10
	14	54	24	64	34	04	44	46
	01	11	21	31	41	51	61	10
	15	65	45	25	05	55	35	56
	01	11	21	31	41	51	61	10
	16	06	66	56	46	36	26	66
	01	11	21	31	41	51	61	10

Die unterstrichenen Substitutionen erfüllen die Bedingungen

$$ad - (ac + bd) \equiv \pm 2 \pmod 7$$
$$c^2 + d^2 - cd \equiv 0 \pmod 7$$

Die doppelt unterstrichenen erfüllen außerdem:

$$a^2 + b^2 - ab \equiv 0 \pmod 7$$

Von den erstern sind in der Gruppe $G^{(3)}_{71}$, von den letzteren in der Gruppe $G^{(3)}_{77}$ je zwei vorhanden. Es ist daher in jedem Fall $\varepsilon_\varrho = 2$. Die Anzahl der ϱ-Ecken beträgt demnach für

$$\Gamma^{(3)}_{71} \; : \; e_\varrho = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}\mu^{(3)}(7,1) = 4$$
$$\Gamma^{(3)}_{77} \; : \; e_\varrho = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}\mu^{(3)}(7,7) = 20$$

Auf dieselbe Weise wird für die übrigen in Betracht fallenden Gruppen die nachstehende Tabelle erhalten:

$n = 7$		$h = 1$	7	)
	$g = 3$	$e_\varrho = 4$	20	)

$n = 13$		h	$= 1$	13		
	$g = 3$	e_ϱ	$= 12$	124		
	$g = 6$	e_ϱ	$= 6$	62		
$n = 19$		h	$= 1$	19		
	$g = 3$	e_ϱ	$= 24$	384		
	$g = 9$	e_ϱ	$= 8$	128		
$n = 21$		h	$= 1$	3	7	21
	$g = 3$	e_ϱ	$= 24$	64	152	448
	$g = 6$	e_ϱ	$= 12$	32	76	224

Man sieht leicht ein, daß zur Bestimmung von ε_i sowohl, als von ε_ϱ nur diejenigen Substitutionen mit zu n teilerfremden c aufgeschrieben zu werden brauchen.

3. $n = 8$. n ist eine Zahl von der Form $q^2 N$. Wir betrachten vorweg den Fall $h = 1$ und schreiben uns die sämtlichen 24 Substitutionen der Gruppe $G_{81}^{(1)}$ auf:

		$G_{81}^{(2)}$											
$G_{81}^{(1)}$	$G_{81}^{(2)}$	10	10	10	10	10	10	10	10	01	11	07	07
		01	11	21	31	41	51	61	71	72	12	14	10
		30	30	30	30	30	30	30	30	05	55	05	05
		03	33	63	13	43	73	23	53	32	52	34	30

Darunter sind in der Gruppe $G_{81}^{(2)}$

8 enthalten, für welche $[c, q] = 1,\ t = 1,\ \Theta = 1,\ k = 8$
2 „ „ „ $[c, q] = 2,\ t = 2,\ \Theta = 1,\ k = 2$
2 „ „ „ $[c, q] = 2,\ t = 2,\ \Theta = 2,\ k = 1$

Es folgt für:

$$h = 1\colon\ e_\infty = \tfrac{1}{8}\ 8 + \tfrac{1}{2}\ 2 + \tfrac{1}{1}\ 2 = 4$$

$$h = 2\colon\ e_\infty = \tfrac{1}{8}\ 16 + \tfrac{1}{2}\ 4 + \tfrac{1}{2}\ 4 = 6$$

$$h = 4\colon\ e_\infty = \tfrac{1}{8}\ 32 + \tfrac{1}{4}\ 8 + \tfrac{1}{4}\ 8 = 8$$

$$h = 8\colon\ e_\infty = \tfrac{1}{8}\ 64 + \tfrac{1}{8}\ 16 + \tfrac{1}{8}\ 16 = 12$$

Die Zahl der ∞-Ecken halten wir auch für die übrigen in Betracht fallenden Gruppen in nachstehender Tabelle fest:

$n = 8$		h	$= 1$	2	4	8		
	$g = 2$	e_∞	$= 4$	6	8	12		
$n = 9$		h	$= 1$	3	9			
	$g = 3$	e_∞	$= 4$	6	12			
$n = 12$		h	$= 1$	2	3	4	6	12
	$g = 2$	e_∞	$= 6$	8	12	12	16	24
$n = 16$		h	$= 1$	2	4	8	16	
	$g = 2$	e_∞	$= 10$	16	24	32	48	
	$g = 4$	e_∞	$= 6$	8	12	16	24	
$n = 18$		h	$= 1$	2	3	6	9	18
	$g = 3$	e_∞	$= 8$	12	13	18	25	36
$n = 20$		h	$= 1$	2	4	5	10	20
	$g = 2$	e_∞	$= 12$	16	24	36	48	72
	$g = 4$	e_∞	$= 6$	8	12	18	24	36
$n = 24$		h	$= 1$	2	3	4	6	8	12	24
	$g = 4$	e_∞	$= 8$	12	16	16	24	24	32	48
$n = 25$		h	$= 1$	5	25			
	$g = 5$	e_∞	$= 12$	20	60			
	$g = 10$	e_∞	$= 6$	10	30			
$n = 27$		h	$= 1$	3	9	27		
	$g = 3$	e_∞	$= 18$	36	54	108		
	$g = 9$	e_∞	$= 6$	12	18	36		
$n = 28$		h	$= 1$	2	4	7	14	28
	$g = 2$	e_∞	$= 18$	24	36	72	96	144
	$g = 6$	e_∞	$= 6$	8	12	24	32	48

Mit Hilfe der aufgestellten Formeln und der Tabellen findet man nun die in folgender Tabelle zusammengestellten Geschlechter der Gruppen von der Stufe 1 bis 16.

Tabelle für das Geschlecht p einer Kongruenzgruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$

n	g	h=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0															
2	1	0	0														
3	1	0		0													
4	1	0	0		0												
5	1	0				0											
	2	0				0											
6	1	0	0	0			1										
7	1	0						3									
	3	0						1									
8	1	0	0		1				5								
	2	0	0		1				3								
9	1	0		1						10							
	3	0		1						4							
10	1	0	1			4					13						
	2	0	1			2					7						
11	1	1										26					
	5	1										6					
12	1	0	1	3	5		9						25				
	2	0	1	1	3		5						13				
13	1	2												50			
	2	0												24			
	3	0												16			
	6	0												8			
14	1	1	4					19							49		
	3	1	2					7							17		
15	1	1		9		17										73	
	2	1		5		9										37	
	4	1		3		5										19	
16	1	2	5		13				33								81
	2	0	1		5				17								41
	4	0	1		3				9								21

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur noch mit Gruppen vom Geschlecht p = 0. Aus der Tabelle entnehmen wir die nachstehenden derartigen Gruppen:

$(n,g,h) =$ (1, 1, 1,) (2, 1, 1) (2, 1, 2) (3, 1, 1) (3, 1, 3) (4, 1, 1) (4, 1, 2)
(4, 1, 4) (5, 1, 1) (5, 1, 5) (5, 2, 1) (5, 2, 5) (6, 1, 1) (6, 1, 2)
(6, 1, 3) (7, 1, 1) (7, 3, 1) (8, 1, 1) (8, 1, 2) (8, 2, 1) (8, 2, 2)
(9, 1, 1) (9, 3, 1) (10, 1, 1) (10, 2, 1) (12, 1, 1) (12, 2, 1)(13, 2, 1)
(13, 3, 1) (13, 6, 1) (16, 2, 1) (16, 4, 1)

Außer diesen existieren bis zur 30sten Stufe nur noch die Gruppen (18, 3, 1) und (25, 10, 1) vom Geschlecht 0.

Ein Teil unserer Resultate ist schon von andern Autoren gefunden worden.

Gierster[1]) hat die *Transformationsgruppen* vom Geschlecht Null bestimmt und gefunden, daß unter diesen Gruppen von nichtprimzahligem Transformationsgrad n einzig diejenigen vom Grade $n = 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$ vom Geschlecht $p = 0$ sind.

Kiepert[2]) berechnet für die *Transformationsgruppen* n^{ter} Stufe das Geschlecht p von $n = 1$ bis 60 und findet folgende Werte:

n	p	n	p	n	p
1	0	11	1	21	1
2	0	12	0	22	2
3	0	13	0	23	2
4	0	14	1	24	1
5	0	15	1	25	0
6	0	16	0	26	2
7	0	17	1	27	1
8	0	18	0	28	2
9	0	19	1	29	2
10	0	20	1	30	3

usw.

Vergleicht man diese Resultate mit unserer Tabelle, so sieht man, daß die Resultate von *Gierster* und *Kiepert* in den unsrigen enthalten sind, und zwar stimmen die Geschlechter der von *Kiepert* untersuchten Transformationsgruppen überein mit den Geschlechtern unserer Gruppen $\Gamma_{n,1}^{(g)}$ wo $h = 1$ und g den größten unter den möglichen Werten besitzt.

[1]) *J. Gierster:* Math. Ann. Band 14: Notiz über Modulargleichungen.

[2]) *L. Kiepert:* Math. Ann. Band 32: Ueber die Transformationen der elliptischen Funktionen.

§ 10. Auffindung sämtlicher Gruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ vom Geschlecht $p = 0$.

Wir bezeichnen für einen Moment Geschlecht, Index und Anzahl der ∞-Ecken der beiden Gruppen $\Gamma_{n,1}$ und $\Gamma_{n,h}$ mit p, μ, e resp. $\bar{p}, \bar{\mu}, \bar{e}$. Wir behaupten, daß dann stets $\bar{p} \geq p$ ist. Für $p = 0$ ist dies evident. Es sei also $p > 0$. Dann ist (nach § 8) für alle $n > 4$:

$$p = 1 + \tfrac{1}{12}\mu - \tfrac{1}{2}e \qquad \bar{p} = 1 + \tfrac{1}{12}\bar{\mu} - \tfrac{1}{2}\bar{e}$$

$$\text{also } \bar{p} - p = \tfrac{1}{12}(\bar{\mu} - \mu) - \tfrac{1}{2}(\bar{e} - e) \tag{85}$$

nun ist $\bar{\mu} = h\mu$ und (weil $\varkappa_\vartheta \geq 1$)

$$\bar{e} = \tfrac{1}{2} h \sum \frac{1}{\varkappa_\vartheta} \varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta^*) < \tfrac{1}{2} h \sum \varphi(\vartheta)\varphi(\vartheta^*) = h e \tag{86}$$

Daher ist $\bar{p} - p > (\tfrac{1}{12}\mu - \tfrac{1}{2}e)(h - 1)$

oder also $\bar{p} > p + (h - 1)(p - 1)$

wo $h > 1$, $p \geq 1$

woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergibt. Für die Fälle $n \leq 4$, d. h. für die Gruppen $\Gamma_{1,1} \ldots \Gamma_{4,4}$ wissen wir aber, daß $p = 0$, also der Satz ebenfalls wahr ist. Wir wollen nun zeigen, daß von einem gewissen n an $p(n, h)$ stets größer als 0 ist. Offenbar genügt es, dies für $h = 1$ zu beweisen.

Es gilt also für $p(n, 1)$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} p(n, 1) &= 1 + \tfrac{1}{12}\mu(n, 1) - \tfrac{1}{2}e_\infty \\ &= 1 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{6}\sum \vartheta_i \varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*) - \sum \varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*)\right) \end{aligned} \tag{87}$$

$p(n, 1)$ kann nur dann gleich 0 sein, wenn

$\frac{1}{6}\sum \vartheta_i \varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*) - \sum \varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*) = -1$ ist, oder umgekehrt, $p(n, 1)$ ist größer als 0, wenn der eben genannte Ausdruck größer oder gleich 0 ist. Wegen der Symmetrieeigenschaften von ϑ_i und ϑ_i^* können wir diese Bedingungen auch wie folgt schreiben:

$$\tfrac{1}{12}\sum (\vartheta_i + \vartheta_i^*)\varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*) \geq \sum \varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*) \tag{88}$$

$(\vartheta_i + \vartheta_i^*)$ kann als Funktionswert der Funktion $y = x + \frac{n}{x}$ aufgefaßt werden. Zugehörige Argumentwerte sind die ϑ_i. Die Funktion

$y = x + \frac{n}{x}$ hat nun bei $x = \sqrt{n}$ ein *Minimum* und zwar ist dort $y = 2\sqrt{n}$. Es kann also niemals $(\vartheta i + \vartheta i^*)$ kleiner als $2\sqrt{n}$ sein. Daraus folgt:

$$\tfrac{1}{12}\Sigma(\vartheta i + \vartheta i^*)\varphi(\vartheta i)\varphi(\vartheta i^*) - \Sigma\varphi(\vartheta i)\varphi(\vartheta i^*) \geqq \left(\frac{\sqrt{n}}{6} - 1\right)\Sigma\varphi(\vartheta i)\varphi(\vartheta i^*) \tag{89}$$

Für sämtliche Werte $n \geqq 36$ ist aber die rechte Seite dieser Ungleichung positiv oder 0. So folgt also der

Satz 4. *Das Geschlecht $p^{(1)}(n, h)$ einer Kongruenzgruppe von der Form $\Gamma^{(1)}_{n,h}$ kann höchstens für die Stufenzahlen $n = 1$ bis 35 den Wert 0 annehmen. Für alle übrigen Stufenzahlen $n \geqq 36$ ist auch $p^{(1)}(n, h) \geqq 1$.*

Von allen 35 Stufenzahlen $n = 1$ bis 35 fallen wiederum diejenigen außer Betracht, für welche ausnahmslos $\vartheta i + \vartheta i^* \geqq 12$ sind. Denn für sie ist $p \geqq 0$. Für die Stufenzahlen $n = 1$ bis 30 haben wir bereits alle Gruppen vom Geschlecht $p = 0$ bestimmt (siehe Tabelle auf Seite 47), und für diejenigen der Stufenzahl 31 bis 35 sehen wir nun, daß keine derselben das Geschlecht 0 aufweisen kann, da dort stets $(\vartheta i + \vartheta i^*) \geqq 12$ ist.

§ 11. Weitere Ausscheidung der Gruppen $\Gamma^{(g)}_{n,h}$.

Wir haben in § 2 zwei weitere Bedingungen I und II aufgestellt, die erfüllt sein müssen, wenn die Modulargleichung, die der Gruppe $\Gamma^{(g)}_{n,h}$ zugeordnet ist, die Form $y^2 = R(x)$ annehmen soll. Setzen wir

$$\Gamma^{(g)}_{n,h} = \begin{pmatrix} \alpha i + a n, & b h \\ c n & , \alpha_j + d n \end{pmatrix}$$

wo a, b, c, d sämtliche ganzzahligen Werte annehmen dürfen, sofern nur die Substitutionsdeterminante gleich 1 ist. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\Gamma} &= \begin{pmatrix} \alpha i + an, & \frac{1}{2} b h \\ 2 cn & , \alpha_j + d n \end{pmatrix} \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} \alpha i + an, & b h \\ cn & , \alpha_j + d n \end{pmatrix} \\ \Gamma'' &= \begin{pmatrix} \alpha i + an, & 2 b h \\ \frac{1}{2} cn & , \alpha_j + d n \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

$$a, b, c, d = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

Der gemeinsame Teiler von $\bar{\Gamma}$ und Γ ist $= \Delta \begin{pmatrix} \alpha i + an, & bh \\ 2cn, & \alpha_j + dn \end{pmatrix}$

Der gemeinsame Teiler von Γ' und Γ ist $= \Delta' \begin{pmatrix} \alpha i + an, & 2bh \\ cn, & \alpha_j + dn \end{pmatrix}$

Setzen wir nun noch $P = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ n, 1 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \frac{1}{2}n, 1 \end{pmatrix}$

und $$Q = \begin{pmatrix} 1, h \\ 0, 1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}h \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

so muß nach Bedingung II die Substitution $(PQ'')\,(Q''P)^{-1}$ zu Δ und $(P'Q)\,(Q\,P')^{-1}$ zu Δ' gehören. — Nun ist z. B.

$$PQ'' = \begin{pmatrix} 1, & \frac{1}{2}h \\ n, 1 + \frac{1}{2}nh \end{pmatrix}; \quad Q''P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}nh, \frac{1}{2}h \\ n, 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(PQ'')\,(Q''P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{1}{2}h \\ n, 1 + \frac{1}{2}nh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -\frac{1}{2}h \\ n, 1 + \frac{1}{2}nh \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}hn, & -\frac{1}{4}nh^2 \\ \frac{1}{2}n^2h, & 1 + \frac{1}{2}nh + \frac{1}{4}nh \end{pmatrix}$$

Soll diese Substitution zu Δ gehören, so muß notwendig h eine gerade Zahl und, da wir h als Teiler von n festsetzten, auch n eine gerade Zahl sein. Dieselbe Bedingung finden wir bei Ausrechnung von $(P'Q)\,(QP')^{-1}$. Dann aber ist:

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \alpha i + an + bhn, & bh \\ 2cn + \alpha i\, n + dn^2, & \alpha_j + dn \end{pmatrix}$$

Da αi für gerade n nur ungerade Werte annehmen kann, ist der dritte Koeffizient von der Form $(2m + 1)\,n$, so daß die Gesamtheit $\Delta + \Delta P$ gerade die Gruppe Γ darstellt. Es ist also:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \Delta + \Delta \bar{Q} \\ \Gamma &= \Delta + \Delta P = \Delta' + \Delta' Q \\ \Gamma' &= \Delta' + \Delta' P' \end{aligned}$$

So finden wir als *einzige Gruppen, für welche eine Modulargleichung von der gewünschten Form existieren kann*, die Gruppen mit den Indizes:

$$(n, h, g) = (2, 2, 1), (4, 2, 1), (4, 4, 1)\,(6, 2, 1), (8, 2, 1) \text{ und } (8, 2, 2)$$

Von diesen sechs Gruppen kennen wir bereits die Modulargleichungen zu $(n, h, g) = (4, 2, 1)\,(6, 2, 1)$ und $(8, 2, 1)$. Es sind dies die Gleichungen auf Seite 7 und 8, von denen wir ausgegangen sind.

§ 12. Die Modulargleichungen von der Form $y^2 = R(x)$ und ihre zugehörigen Modulfunktionen.

Die für unsere Zwecke in Betracht fallenden sechs Kongruenzgruppen

$$\Gamma_{22}^{(1)},\ \Gamma_{42}^{(1)},\ \Gamma_{44}^{(1)},\ \Gamma_{62}^{(1)},\ \Gamma_{82}^{(1)} \text{ und } \Gamma_{82}^{(2)}$$

und ihre zugehörigen Modulfunktionen haben folgende Eigenschaften gemeinsam:

I. alle sechs Gruppen sind vom Geschlecht 0.

II. alle sechs Gruppen sind Untergruppen der Hauptkongruenzgruppe 2^{ter} Stufe Γ_{22}.

III. die zu der Hauptkongruenzgruppe 2^{ter} Stufe gehörende *Legendre'sche Modulfunktion* $\lambda(t)$ drückt sich rational je durch eine zu den übrigen Gruppen gehörende Modulfunktion aus.

IV. ist $\Phi(t)$ eine Modulfunktion, die zu einer der sechs Gruppen gehört und eine Modulargleichung von der betrachteten Form besitzt, so ist die Gesamtheit aller Modulfunktionen von derselben Form und derselben Gruppe durch:

$$\Psi(t) = A\,\Phi(t) \text{ und } X(t) = \frac{1}{A\,\Phi(t)} \qquad (91)$$

gegeben, wo A jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Zu II. Der Beweis ist leicht einzusehen. Jede Substitution, die einer der obgenannten Kongruenzgruppen angehört, gehört auch der Gruppe Γ_{22} an.

Zu III. Der Index der $\Gamma_{22}^{(1)}$ ist $\mu^{(1)}(2,2) = 6$. Der Index der übrigen Gruppen ist $\mu^{(g)}(n,h)$. Daher ist der (relative) Index der Gruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ bezüglich der $\Gamma_{22}^{(1)}$ gleich $\frac{1}{6}\,\mu^{(g)}(n,h)$. Da die *Legendre*'sche Funktion $\lambda(t)$ *Hauptmodul der* $\Gamma_{22}^{(1)}$ ist, so ist also der Grad der Rationalität der Beziehung zwischen $\lambda(t)$ und $\Phi(t)$ gleich $\frac{1}{6}\,\mu^{(g)}(n,h)$. D. h. $\lambda(t)$ ist in $\Phi(t)$ vom Grade $\frac{1}{6}\,\mu^{(g)}(n,h)$.

Zu IV. Daß alle Funktionen $A\Phi(t)$ und $\frac{1}{A\Phi(t)}$ eine Modulargleichung von der Form $y^2 = R(x)$ haben, davon kann man sich durch Ersetzen von x durch Ax resp. $\frac{1}{Ax}$ und y durch Ay resp. $\frac{1}{Ay}$ leicht überzeugen.

Daß damit alle der Gleichung genügenden Modulfunktionen der Gruppe gefunden sind, leuchtet unmittelbar ein.

Wir suchen daher für jede der sechs Gruppen eine einzige Modulargleichung und ihre zugehörige Modulfunktion $\Phi(t)$. Dies erreichen wir dadurch, daß wir $\Phi(t)$ an einer geeigneten ∞-Ecke den Wert 1 und an einer anderen ∞-Ecke den Wert ∞ vorschreiben. Die so definierte Modulfunktion wollen wir *normiert* nennen. Alsdann haben die zu $\Psi(t)$ resp. $X(t)$ gehörigen Modulargleichungen die Form:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= A^2 R\left(\frac{X}{A}\right) \\ \text{resp.}\quad y^2 &= \frac{1}{A^2 R\left(\frac{1}{Ax}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

1. Gruppe $\Gamma_{22}^{(1)}$. Der Punkt $t = \infty$ geht durch irgendeine Modulsubstitution $V = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ in den Punkt $t = \frac{a}{c}$ über. (Dies drückt die bekannte Tatsache aus, daß die absolute Invariante $J(t)$ für jede beliebige reelle, rationale Zahl als Argument t denselben Wert wie für $t = \infty$ nämlich: $J(a\ c) = J(\infty) = \infty$ annimmt.) Ist $\Phi_1(t)$ eine Modulfunktion, die zur Gruppe $\Gamma_{22}^{(1)}$ gehört, so nimmt sie an den Stellen $t = a/c$ soviele verschiedene Werte an, als es im F.-B. der $\Gamma_{22}^{(1)}$ ∞-Ecken gibt, also $\mu(2, 1) = 3$.

Die Substitutionen der Gruppe $\Gamma_{22}^{(1)} = \Gamma$ haben die Form

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 2, 2 \\ 2, 2 \end{bmatrix} \right)$$

wir schreiben dies kurz:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 2, 2 \\ 2, 2 \end{bmatrix} \right)$$

Ihre Transformierte Γ'' lautet:

$$\Gamma'' \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 2, 1 \\ 4, 2 \end{bmatrix} \right)$$

woraus die gemeinsame Untergruppe Δ folgt:

$$\Delta \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 4, 2 \\ 2, 2 \end{bmatrix} \right)$$

Nun kann man für die Substitution P (siehe S. 10)

$$P = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 2, 1 \end{pmatrix} = \frac{t}{2t + 1}$$

wählen. Dann ist tatsächlich

$$\Gamma = \Delta + \Delta P$$

Die drei ∞-Ecken des F.-B. der $\Gamma_{22}^{(1)}$ kann man ohne weiteres aus den Quotienten der kleinsten positiven Reste 0 und 1 (*mod* 2) ablesen.

Sie sind	$ti =$	∞	1	0
und ihre äquivalenten Ecken sind	$ti =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2
Daraus ergeben sich die Werte	$P(ti) =$	∞	1	0
	$2\,ti =$	∞	0	0
	$2\,P(ti) =$	1	0	0

Nun geben wir noch $\Phi_1(t)$ an diesen Stellen die Werte

	$\Phi_1(ti) =$	$A,$	$B,$	C
$\Phi_1(2t)$ nimmt dann die Werte an	$\Phi_1(2ti) =$	$A,$	$C,$	C
und $\Phi_1(2P)$ wird	$\Phi_1(2Pti) =$	$B,$	$C,$	C
Wir fügen noch die Werte von	$\lambda(t) =$	0,	$\infty,$	1
und die „*Multiplizitäten*“ bei:	$m =$	1,	1,	1

Mit der *Multiplizität* m bezeichnen wir die halbe Zahl der Doppeldreiecke, die um die betreffende ∞-Ecke gelagert sind. Sie gibt an, wie oft $\lambda(t)$ um die ∞-Ecke läuft, wenn $\Phi_1(t)$ einmal herumläuft. Da $\Phi_1(t)$ denselben F.-B. besitzt wie $\lambda(t)$, ist es in $\lambda(t)$ linear. Die nachstehende Figur (nach S. 8 das „Verzweigungsschema“ der Modulargleichung) veranschaulicht den Uebergang von $\Phi_1(t)$ zu $\Phi_1(2t)$.

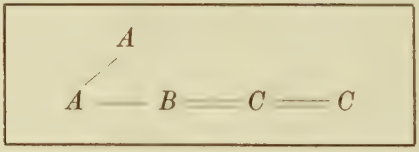

Fig. 4.

Da y in der Modulargleichung nur in der zweiten Potenz vorkommt, können die beiden ein und demselben x zugeordneten Werte y_1 und y_2 nur dann einander gleich sein, wenn sie entweder 0 oder ∞ sind.

Aus der Gleichung $\Phi(2P) = -\Phi(2t)$ folgt: $A = -B$, $C = -C$. Wir normieren nun $\Phi_1(t)$ indem wir $A = 1$ und $C = \infty$ setzen; dann ist $B = -1$.

Wir setzen nun $y^2 = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\bar{a}x^2 + bx + \bar{c}}$ an, und setzen für (x, y) der Reihe nach entsprechende Werte ein.

Für $x = \infty$, $y = \infty$ findet man $\bar{a} = 0$

Für $x = -1$, $y = \infty$ findet man $\bar{c} = \bar{b}$

Für $y = +1$ erhalten wir:

$$a\,x^2 + (b - \bar{b})\,x + (c - \bar{b}) = 0$$

Diese Gleichung muß die *Doppelwurzel* $x = +1$ haben. Es ist daher:

$$b - \bar{b} = -2\,a, \quad c - \bar{b} = a$$

Nun haben wir die Modulargleichung bereits auf die Form gebracht

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= \frac{ax^2 + (\bar{b} - 2\,a)\,x + (\bar{b} + a)}{\bar{b}\cdot(x+1)} \\ &= \frac{\mu x^2 + (1 - 2\,\mu)\,x + (1 + \mu)}{(x+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

worin nur noch μ eine zu bestimmende Konstante ist. Reelle Werte t können nun nichts Neues mehr bringen.

Wir setzen $a = 1$, $c = 2$ und $\omega = \dfrac{1+i}{2}$, dann ist $2\omega = 1 + i$,

$$2\,P(\omega) = \frac{1+i}{2+i} = \frac{3+i}{5} \sim 1 + i = 2\,\omega$$

D. h. zu $\Phi_1(\omega)$ gehört die Doppelwurzel $\Phi_1(2\omega) = \Phi_1(2P\omega)$ und umgekehrt zu $\Phi_1(2\omega)$ gehört die Doppelwurzel $\Phi_1(\omega) = \Phi_1(Q''\omega)$. Aus $\Phi(2\omega) = -\Phi_1(2P\omega) = -\Phi_1(2\omega)$ folgt $\Phi_1(2\omega) = 0$. Es folgt daher aus der Gleichung (93), wenn wir für y den Wert 0 einsetzen, und beachten, daß dann der Zähler $\mu x^2 + (1 - 2\mu)\,x + (1 + \mu)$ eine Doppelwurzel besitzt:

$$(1 - 2\mu)^2 = 4\,\mu\,(1 + \mu) \text{ oder also } \mu = \tfrac{1}{8}$$

Damit haben wir auch schon die endgültige Form der gesuchten Modulargleichung gefunden. Sie lautet:

$$y^2 = \frac{1}{8}\,\frac{x^2 + 6\,x + 9}{x+1} = \frac{(x+3)^2}{8\,(x+1)} \qquad (94)$$

Aus den $\lambda(t)$ und $\Phi_1(t)$ zugeordneten Werten finden wir die Beziehung:

$$\lambda(t) = \frac{\Phi_1(t) - 1}{\Phi_1(t) + 1} \tag{95}$$

Durch die Substitution

$$\xi = \frac{x-1}{x+1}, \quad \eta = \frac{y-1}{y+1}$$

geht in der Tat die Gleichung (94) in die Gleichung

$$\xi^2(\eta - 1)^2 - 16(1-\xi)\eta = 0$$

über, welche die Beziehung zwischen $\xi = \lambda(t)$ und $\eta = \lambda(2t)$ ausdrückt (Vgl. *H. Burkhardt*, Elliptische Funktionen S. 268).

Es ist besonders interessant, daß man nach unserer Methode diese Gleichung auf elementarem algebraischem Weg erhält, ohne von den sonst üblichen transzendenten Reihenentwicklungen Gebrauch zu machen.

2. Gruppe $\Gamma^{(1)}_{4,2}$. Der Index der Gruppe berechnet sich nach Satz 3 zu $\mu^{(1)}(4,2) = 12$. Es ist also die Beziehung zwischen $\lambda(t)$ und der zur Gruppe gehörenden Modulfunktion $\Phi_2(t)$ algebraisch vom zweiten Grad. Wir geben ihr die allgemeine Form:

$$\lambda(t) = l\frac{[\Phi_2(t) - \alpha][\Phi_2(t) - \beta)}{[\Phi_2(t) - \gamma][\Phi_2(t) - \delta]}$$

Die Gruppe $\Gamma^{(1)}_{4,2} = \Gamma$ läßt sich nun in der Form darstellen

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 4, 2 \\ 4, 4 \end{bmatrix} \right)$$

Ihre Transformierte Γ'' lautet:

$$\Gamma'' \equiv \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 4, 1 \\ 8, 4 \end{bmatrix} \right)$$

Daraus folgt die gemeinsame Untergruppe Δ:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \left(mod \begin{bmatrix} 4, 2 \\ 8, 4 \end{bmatrix} \right)$$

Wählt man jetzt die Substitution P

$$P = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 4, 1 \end{pmatrix} = \frac{t}{4t+1}$$

so ist tatsächlich

$$\Gamma = \Delta + \Delta P$$

Aus den vier kleinsten positiven Resten 0,1, 2, 3 (*mod* 4) liest man ohne weiteres die vier ∞-Ecken ab, nämlich:

	ti =	∞	$\frac{1}{2}$	1	0
und ihre äquivalenten Ecken	ti =	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	2
Daraus ergeben sich die Werte	$P(ti)$ =	∞	$\frac{1}{2}$	1	0
	$2ti$ =	∞	1	0	0
	$2(Pti)$ =	$\frac{1}{2}$	1	0	0

gibt man jetzt $\Phi_2(t)$ an diesen vier Stellen die Werte

	$\Phi_2(ti)$ =	A,	B,	C,	D
so folgt	$\Phi_2(2ti)$ =	A,	C,	D,	D
und	$\Phi_2(2Pti)$ =	B,	C,	D,	D
Ferner wird	$\lambda(t)$ =	0,	0,	∞,	1
die Multiplizitäten m werden	m =	1,	1,	2,	2

Das Schema der Funktion $\Phi_2(t)$ wird durch die Fig. 5 veranschaulicht.

Fig. 5.

Aus der Gleichung $\Phi(2P) = -\Phi(2t)$ folgt

$$A = -B,\ C = -C,\ D = -D.$$

Jetzt normiere man: $A = 1$, $C = \infty$, dann wird $D = -1$ und (weil $D \neq C$ sein kann) $D = 0$.

Die Beziehung zwischen $x = \Phi_2(t)$ und $y = \Phi_2(2t)$ setzen wir wieder in der Form an:

$$y^2 = \frac{ax^2 + bx + c}{\bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}} \tag{96}$$

Setzt man an Stelle von x die Werte von A, B, C, D und an Stelle von y die entsprechenden Werte, die man aus Fig. 5 entnehmen kann:

x =	± 1,	-1,	∞,	0
y =	± 1,	∞,	0,	0

so erhält man

$$a = 0, \quad b = \bar{a} + b + \bar{c}$$
$$c = 0, \quad 0 = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$$

Da aber y vom zweiten Grad unendlich wird, muß die Diskriminante des Nenners verschwinden, es ist also $\bar{b}^2 = 4\,ac$. Nun dürfen wir noch eine der Zahlen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, b$, beliebig wählen. Wir setzen $b = 4$ und erhalten für die andern:

$$\bar{a} = 1, \ \bar{b} = 2, \ \bar{c} = 1$$

Damit haben wir auch bereits die Modulargleichung für $\Phi_2(t)$ gefunden. Sie lautet:

$$y^2 = \frac{4\,x}{(1 + x)^2} \tag{97}$$

Es ist dies die bereits in der Einleitung erwähnte Gleichung von Gauß.

Die Beziehung zwischen $\Phi_2(t)$ und $\lambda(t)$ wird ähnlich gefunden. Es ist:

für $\Phi_2(t) = A = 1$: $\lambda(t) = 0$
für $\Phi_2(t) = B = -1$: $\lambda(t) = 0$ } woraus $\alpha = 1, \beta = -1$ folgt.
für $\Phi_2(t) = C = \infty$: $\lambda(t) = \infty$ von der Multiplizität 2.

Der Nenner $[\Phi_2(t) - c]\,[(\Phi_2(t) - d)]$ muß daher konstant sein. Wir setzen ihn gleich 1.

Für $\Phi_2(t) = D = 0$ wird $\lambda(t) = 1$. Es folgt $1 = -l$.

Die gesuchte Beziehung lautet somit:

$$\lambda(t) = -[\Phi_2(t) - 1]\,[\Phi_2(t) + 1)] \text{ oder}$$
$$\lambda(t) = 1 - \Phi_2^2(t) \tag{98}$$

Da die Entwicklungen für die übrigen Gruppen den vorstehenden vollständig analog sind, begnügen wir uns im Folgenden mit der Angabe der Resultate für jede Gruppe.

3. **Gruppe** $\Gamma^{(1)}_{4,4}$. Die ∞-Ecken des F.-B. sind

$t =$	∞	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	2	0	ferner ist
$\Phi_3(t) =$	A	B	C	D	E	F	
$\Phi_3(2t) =$	A ,	C ,	E ,	E ,	F ,	F	
$\Phi_3(2P) =$	B ,	D ,	E ,	E ,	F ,	F	
$\lambda(t) =$	0	0	∞	∞	1	1	
$m =$	2	2	2	2	2	2	

Fig. 6 zeigt uns das Schema:

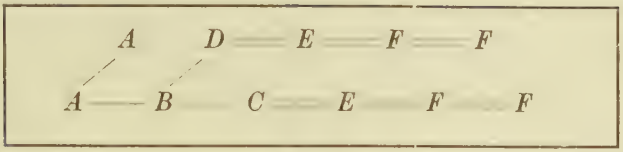

Fig. 6.

Wir normieren $E = \infty$, $A = 1$.

Ferner ist $\frac{1}{6}\mu = 4$. Daraus erhalten wir die Modulargleichung

$$y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \tag{99}$$

und die Beziehung zwischen der zugehörigen Modulfunktion $\Phi_3(t)$ und $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \left[\frac{\Phi_3^2(t) - 1}{\Phi_3^2(t) + 1}\right]^2 \tag{100}$$

4. Gruppe $\Gamma^{(1)}_{6,2}$. Die ∞-Ecken des F.-B. sind

$t =$	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	0	ferner ist
$\Phi_4(t) =$	A	B	C	D	E	F	
$\Phi_4(2t) =$	A ,	C ,	C ,	D ,	F ,	F	
$\Phi_4(2P) =$	B ,	C ,	C ,	E ,	F ,	F	
$\lambda(t) =$	0	∞	1	0	∞	1	
$m =$	1	1	1	3	3	3	

Die Modulargleichung hat hier zwei Schemata:

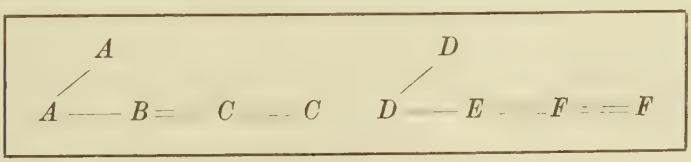

Fig. 7.

Wir normieren $C = \infty$, $A = 1$.

Der Index der Gruppe ist $\mu = 24$, also ist $\frac{1}{6}\mu = 4$. Daraus erhalten wir die Modulargleichung:

$$y^2 = \frac{x(3 - x)}{x + 1} \tag{101}$$

und die Beziehung zwischen der zugehörigen Modulfunktion $\Phi_4(t)$ und $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{(\Phi_4(t) - 1)\,(\Phi_4(t) + 3)^3}{(\Phi_4(t) + 1)\,(\Phi_4(t) - 3)^3} \tag{102}$$

5. Gruppe $\Gamma^{(1)}_{8,2}$. Es ist:

$t =$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
$\Phi_5(t) =$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
$\Phi_5(2t) =$	A ,	B ,	E ,	E ,	G ,	G ,	I ,	K ,	I ,	K
$\Phi_5(2P) =$	C ,	D ,	F ,	F ,	H ,	H ,	I ,	K ,	I ,	K
$\lambda(t) =$	0	0	0	0	0	0	∞	∞	1	1
$m =$	1	1	1	1	2	2	4	4	4	4

Fig. 8 zeigt das Schema

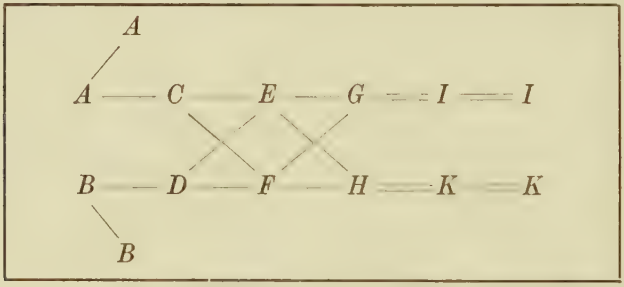

Fig. 8.

Wir normieren $G = 1$, $K = \infty$. Ferner ist $\frac{1}{6}\mu = 8$. Daraus erhalten wir die Modulargleichung:

$$y^2 = \frac{x\,(1 - x)}{1 + x} \tag{103}$$

und die Beziehung zwischen der zugehörigen Modulfunktion $\Phi_5(t)$ und $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{[(\Phi_5(t) + 1)^2 - 2]\,[(\Phi_5(t) - 1)^2 - 2]\,[\Phi_5{}^2(t) + 1]^2}{(\Phi_5(t) + 1)^4 \cdot (\Phi_5(t) - 1)^4} \tag{104}$$

6. Gruppe $\Gamma^{(2)}_{8,2}$. Es ist:

$t =$	∞	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	0
$\Phi_6(t) =$	A	B	C	D	E	F
$\Phi_6(2t) =$	A ,	C ,	E ,	E ,	F ,	F
$\Phi_6(2P) =$	B ,	D ,	E ,	E ,	F ,	F
$\lambda(t) =$	0	0	0	0	∞	1
$m =$	1	1	1	1	4	4

Fig. 9 zeigt das Schema:

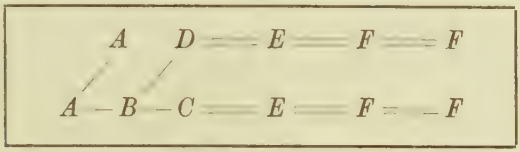

Fig. 9.

Das Schema ist hier dasselbe, wie dasjenige der Modulargleichung (99). Ebenso ist $\frac{1}{6}\mu = 4$. Dagegen sind die Werte für $\lambda(t)$ an den entsprechenden Stellen der Funktion $\Phi_6(t)$ andere als bei der 3. Gruppe. Es wird daher zur Gruppe $\Gamma^{(2)}_{8,2}$ eine Modulfunktion $\Phi_6(t)$ gehören, die von derjenigen der Gruppe $\Gamma^{(1)}_{4,4}$ nämlich $\Phi_3(t)$ verschieden ist und doch derselben Modulargleichung

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1} \tag{105}$$

genügt.

Die Beziehung zwischen $\Phi_6(t)$ und $\lambda(t)$ lautet hier:

$$\lambda(t) = 1 - \Phi_6^4(t) \tag{106}$$

Daß die 3. und die 6. Gruppe die nämliche Modulargleichung liefern, hat seinen Grund darin, *daß die eine Gruppe die Transformierte der andern ist.* Tatsächlich ist die Gruppe $\Gamma^{(1)}_{8,8}$ (Hauptkongruenzgruppe 8^{ter} Stufe) Untergruppe sowohl von $\Gamma^{(1)}_{44}$ als auch von $\Gamma^{(2)}_{8,2}$. Reduzieren wir die beiden Gruppen auf die Hauptkongruenzgruppe 8^{ter} Stufe, so erhalten wir als Substitutionen von:

$\Gamma_{44}^{(1)}$: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&4\\0&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\4&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}$

und von:

$\Gamma_{82}^{(2)}$: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\2&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&0\\4&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix}$

Wenden wir auf die Substitutionen der $\Gamma_{44}^{(1)}$ die Transformation $(2\,\Gamma\frac{1}{2})$ an; so erhalten wir, wie man sich leicht überzeugt, gerade die Substitution der $\Gamma_{8,2}^{(2)}$.

§ 13. Zusammenfassung.

Die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Resultate fassen wir wie folgt zusammen:

Das Geschlecht $p^{(g)}(n,h)$ einer Kongruenzgruppe $\Gamma_{n,h}^{(g)}$, wie sie in § 8 definiert wurde, ist durch die Formel

$$p^{(g)}(n,h) = 1 + \frac{1}{12}\mu^{(g)}(n,h) - \left(\frac{1}{4}\varepsilon_i + \frac{1}{3}\varepsilon_\varrho\right) - \frac{h}{4g}\sum\frac{1}{\varkappa_i}\varphi(\vartheta_i)\varphi(\vartheta_i^*)$$

gegeben.

Auf Grund dieser Formel berechnet man die Zahlenwerte in der Tabelle auf Seite 47.

Insbesondere erweisen sich als einzige Gruppen $\Gamma_{n,h}^{(g)}$ vom Geschlecht $p = 0$ diejenigen, mit den Indizes

$(n,h,g) =$ (1, 1, 1) (2, 1, 1) (2, 2, 1) (3, 1, 1) (3, 3, 1) (4, 1, 1) (4, 2, 1)
(4, 4, 1) (5, 1, 1) (5, 5, 1) (5, 1, 2) (5, 5, 2) (6, 1, 1) (6, 2, 1)
(6, 3, 1) (7, 1, 1) (7, 1, 3) (8, 1, 1) (8, 2, 1) (8, 1, 2) (8, 2, 2)
(9, 1, 1) (9, 1, 3) (10, 1, 1) (10, 1, 2) (12, 1, 1) (12, 1, 2)
(13, 1, 2) (13, 1, 3) (13, 1, 6) (16, 1, 2) (16, 1, 4)
(18, 1, 3) und (25, 1, 10)

Von diesen Gruppen genügen nur sechs den Bedingungen auf Seite 14, die für die Existenz einer Modulargleichung von der Form

$$y^2 = R(x)$$

zwischen den Modulfunktionen $x = \varphi(t)$ und $y = \varphi(2t)$ notwendig

und hinreichend sind, nämlich

$(n, h, g) = (2, 2, 1)$, $(4, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$, $(6, 2, 1)$, $(8, 2, 1)$ und $(8, 2, 2)$

Sie führen der Reihe nach zu den nachstehenden Modulargleichungen mit den zugehörigen Modulfunktionen $\Phi_i(t)$:

$$y^2 = \frac{(x+3)^2}{8(x+1)}; \quad \lambda(t) = \frac{\Phi_1(t) - 1}{\Phi_1(t) + 1} \tag{94, 95}$$

$$y^2 = \frac{4x}{(1+x)^2}; \quad \lambda(t) = 1 - \Phi_2^2(t) \tag{97, 98}$$

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1}; \quad \lambda(t) = \left[\frac{\Phi_3^2(t) - 1}{\Phi_3^2(t) + 1}\right]^2 \tag{99, 100}$$

und

$$\lambda(t) = 1 - \Phi_6^4(t) \tag{106}$$

$$y^2 = \frac{x(3-x)}{x+1}; \quad \lambda(t) = \frac{(\Phi_4(t) - 1)(\Phi_4(t) + 3)^3}{(\Phi_4(t) + 1)(\Phi_4(t) - 3)^3} \tag{101, 102}$$

$$y^2 = \frac{x(1-x)}{1+x}; \tag{103}$$

$$\lambda(t) = \frac{[(\Phi_5(t) + 1)^2 - 2][(\Phi_5(t) - 1)^2 - 2][\Phi_5(t) + 1]^2}{(\Phi_5(t) + 1)^4 (\Phi_5(t) - 1)^4} \tag{104}$$

Außer den schon bekannten Gleichungen (97), (101), (103), zu denen man auch noch Gleichung (94) rechnen muß, ist also ein einziges neues Beispiel einer Modulargleichung der Form $y^2 = R(x)$ hinzugekommen, nämlich Gleichung (99). Aber auch diese hätte durch die Transformation $y = \bar{y}^2$, $x = \bar{x}^2$ aus der Relation (97) abgeleitet werden können.

Dieses negative Resultat unserer Arbeit scheint darauf hinzudeuten, daß es weitere Lösungen der Aufgabe nicht gibt. Gleichwohl hoffen wir, daß die Methode, durch die wir dies festgestellt haben, nicht ohne Interesse ist.

VITA.

Ich, *Heinrich Johann Ruch* von Mitlödi (Kanton Glarus), bin am 23. Oktober 1895 in Chur als Sohn des Johann Heinrich Ruch und der Josefine geb. Caminada, geboren worden.

Nach Uebersiedlung meiner Eltern nach Biel besuchte ich die dortige Primarschule, das Progymnasium sowie das Gymnasium. Letzteres verließ ich im Herbst 1914, versehen mit dem Reifezeugnis, und trat als regulärer Studierender in die E. T. H. ein. Daselbst besuchte ich vom Herbst 1914 bis zum Herbst 1919 die Vorlesungen, Uebungen und Seminarien der Abteilung für Fachlehrer in Mathematik und Physik. Insbesondere besuchte ich die Vorlesungen der HH. Professoren Dr. *Hirsch*, Dr. *Großmann*, Dr. *Kollros*, Dr. *Hurwitz*, Dr. *Weyl*, Dr. *Polyà*, Dr. *Meißner*, Dr. *Weiß*, Dr. *Piccard*, Dr. *Schweitzer*, Dr. *Wolfer* u. a.

Die Studien waren leider durch die infolge des Krieges häufig veranlaßten Aktivdienste in der schweizerischen Grenzbesetzung mehrmals recht empfindlich unterbrochen, was sich gerade im Studium der mathematischen Fächer unangenehm bemerkbar machte. Die Eidgenössische Technische Hochschule verließ ich, versehen mit dem Diplom, als Fachlehrer in mathematisch-physikalischer Richtung, welchen Beruf ich allerdings in der Folge nie ausübte, da ich im folgenden Jahre in die Dienste der Basler Lebensversicherungs-Gesellschaft in Basel als Versicherungsmathematiker eintrat. Im Frühjahr 1923 wechselte ich meine Anstellung, indem ich ebenfalls als Versicherungsmathematiker in den Dienst des Schweizerischen Lebens-Versicherungs-Verein trat. Zu Beginn des Jahres 1929 wurde ich von dieser Firma zum Prokuristen befördert. Neben meinem Berufe arbeitete ich unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. *O. Spieß* an meiner Dissertation.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, allen diesen Herren für Ihre Bemühungen meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Insbesondere gebührt mein wärmster Dank Herrn Prof. Dr. O. Spieß für die vielen Ratschläge und das stets fördernde Interesse an meiner Arbeit.